

## Wahrscheinlichkeitstheorie

### Übungen

(Keine Abgabe)

#### Aufgabe 45

$X_1, \dots, X_k$  seien unabhängige, reelle ZV mit  $X_j \in \mathcal{L}^1$  für alle  $j$  und  $\mathcal{F} = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  für  $1 \leq n < k$ . Zeigen Sie:

$$E\left(\sum_{j=1}^k X_j \mid \mathcal{F}\right) = \sum_{j=1}^n X_j + \sum_{j=n+1}^k EX_j,$$

$$E\left(\prod_{j=1}^k X_j \mid \mathcal{F}\right) = \prod_{j=1}^n X_j \prod_{j=n+1}^k EX_j.$$

#### Aufgabe 46

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass

$$E(X \mid Y) = EX$$

nicht die Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  impliziert.

#### Aufgabe 47

Seien  $X, Y \in \mathcal{L}^1(P)$  mit

$$E(X \mid Y) = Y \quad \text{und} \quad E(Y \mid X) = X \text{ f.s.}$$

Zeigen Sie:  $X = Y$  f.s.