

Diskrete Verteilungen

Poisson-Verteilung $Poi(\lambda)$

Zähldichte

$$f(n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0,$$

$\lambda > 0$, diskreter Träger \mathbb{N}_0 . Für $X \sim Poi(\lambda)$ gilt

$$EX = \lambda, \text{Var } X = \lambda.$$

Binomialverteilung $B(n, p)$

Zähldichte

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0, \dots, n\},$$

$n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$, diskreter Träger $\{0, \dots, n\}$. Für $X \sim B(n, p)$ gilt

$$EX = np, \text{Var } X = np(1-p).$$

$B(1, p)$ heißt **Bernoulli-Verteilung**.

Hypergeometrische Verteilung $H(N, M, n)$

Zähldichte

$$f(k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k \in \{0, \dots, n\},$$

$N, M, n \in \mathbb{N}, M \leq N, n \leq N$, diskreter Träger $\{\max\{0, n - N + M\}, \dots, \min\{n, M\}\}$.
Für $X \sim H(N, M, n)$ gilt

$$EX = n \frac{M}{N},$$

$$\text{Var } X = \frac{M(N-M)}{N^2} \text{ für } n = 1, \text{Var } X = n \frac{M(N-M)}{N^2} \frac{N-n}{N-1} \text{ für } n \geq 2.$$

Laplace-Verteilung

Zähldichte

$$f(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \omega \in \Omega,$$

$|\Omega| < \infty$. Für $\Omega = \{1, \dots, n\}$ und X Laplace-verteilt auf Ω gilt

$$EX = \frac{n+1}{2}, \text{Var } X = \frac{n^2-1}{12}$$

Geometrische Verteilung $G(p)$

Zähldichte

$$f(n) = p(1-p)^{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

$p \in (0, 1)$, diskreter Träger \mathbb{N} . Für $X \sim G(p)$ gilt

$$EX = \frac{1}{p}, \text{Var } X = \frac{1-p}{p^2}.$$

Absolut stetige Verteilungen

Normalverteilung $N(a, \sigma^2)$

λ^1 - Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R},$$

$a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Für $X \sim N(a, \sigma^2)$ gilt

$$EX = a, \text{Var } X = \sigma^2, \text{Med}(X) = \{a\}.$$

λ^1 -Dichte von $N(0,1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy,$$

α - Fraktil

$$u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha), \alpha \in (0, 1).$$

Es gilt

$$u_{1-\alpha} = -u_\alpha, u_{0.05} = 1.645, u_{0.025} = 1.96, u_{0.01} = 2.326, u_{0.005} = 2.576.$$

Logistische Verteilung $L(a)$

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{e^{x/a}}{a(1 + e^{x/a})^2}, x \in \mathbb{R},$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x/a}} = \frac{e^{x/a}}{1 + e^{x/a}},$$

$a > 0$. $L(a)$ ist symmetrisch um 0. Für $X \sim L(a)$ gilt

$$EX = 0, \text{Var } X = \frac{a^2\pi^2}{3}, \text{Med}(X) = \{0\}.$$

Doppel exponentialverteilung $DE(a)$

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2a} e^{-|x|/a}, x \in \mathbb{R},$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x/a} & , x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/a} & , x > 0, \end{cases}$$

$a > 0$. DE (a) ist symmetrisch um 0. Für $X \sim \text{DE}(a)$ gilt

$$EX = 0, \text{Var}X = 2a^2, \text{Med}(X) = \{0\}.$$

Cauchy - Verteilung C(a)

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi a} \frac{1}{1 + (x/a)^2} = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}, x \in \mathbb{R},$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$a > 0$. C(a) ist symmetrisch um 0. Für $X \sim C(a)$ gilt $\text{Med}(X) = \{0\}$. (EX existiert nicht.)

(Zentrale) t-Verteilung t_n

λ^1 - Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R},$$

$n \in \mathbb{N}$. t_n ist symmetrisch um 0. Es gilt $t_1 = C(1)$. Für $X \sim t_n$ gilt

$$EX = 0 \text{ für } n > 1, \text{Var}X = \frac{n}{n-2} \text{ für } n > 2, \text{Med}(X) = \{0\}.$$

$$(\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0, \text{Gammafunktion})$$

Uniforme Verteilung U(a, b)

λ^1 - Dichte

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x), x \in \mathbb{R},$$

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$. $U(a, b)$ ist symmetrisch um $(a+b)/2$. Für $X \sim U(a, b)$ gilt

$$EX = \frac{a+b}{2}, \text{Var}X = \frac{(b-a)^2}{12}, \text{Med}(X) = \left\{\frac{a+b}{2}\right\}.$$

Exponentialverteilung E(a)

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{1}{a} e^{-x/a} 1_{(0,\infty)}(x), x \in \mathbb{R},$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/a} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0, \end{cases}$$

$a > 0$. Für $X \sim E(a)$ gilt

$$EX = a, \text{Var}X = a^2, \text{Med}(X) = \{a \log 2\}.$$

Weibull- Verteilung $W(a,b)$

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{b}{a^b} x^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right) 1_{(0,\infty)}(x),$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right) & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0, \end{cases}$$

$a > 0, b > 0$. Es gilt $W(a, 1) = E(a)$. $W(a, 2)$ heißt **Rayleigh- Verteilung**.

Für $X \sim W(a, b)$ gilt

$$EX = a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right),$$

$$\text{Var}X = a^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{b} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)^2\right],$$

$$\text{Med}(X) = \{a(\log 2)^{1/b}\}.$$

Gamma-Verteilung $\Gamma(a, b)$

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{1}{a^b \Gamma(b)} x^{b-1} e^{-x/a} 1_{(0,\infty)}(x), x \in \mathbb{R},$$

$a > 0, b > 0$. Es gilt $\Gamma(a, 1) = E(a)$.

Für $X \sim \Gamma(a, b)$ gilt

$$EX = ab, \text{Var}X = a^2b.$$

(Zentrale) χ^2 -Verteilung χ_n^2

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-x/2} 1_{(0,\infty)}(x), x \in \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\chi_n^2 = \Gamma(2, \frac{n}{2})$ und $\chi_2^2 = \Gamma(2, 1) = E(2)$. Für $X \sim \chi_n^2$ gilt

$$EX = n, \text{Var}X = 2n.$$

Für X_1, \dots, X_n i.i.d., $X_1 \sim N(0, 1)$ gilt

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2.$$

Lognormale Verteilung $LN(a, \sigma^2)$

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\log x - a)^2}{2\sigma^2}\right) 1_{(0,\infty)}(x), x \in \mathbb{R},$$

$a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Für $X \sim LN(a, \sigma^2)$ gilt

$$\begin{aligned} EX &= e^{a+\sigma^2/2} \\ \text{Var } X &= e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1), \\ \text{Med}(X) &= \{e^a\}. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$X \sim LN(a, \sigma^2) \Leftrightarrow \log X \sim N(a, \sigma^2).$$

Pareto - Verteilung Pa(a,b)

λ^1 - Dichte

$$f(x) = ba^b x^{-(b+1)} 1_{(a,\infty)}(x), x \in \mathbb{R},$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b & , x > a \\ 0 & , x \leq a, \end{cases}$$

$a > 0, b > 0$. Für $X \sim \text{Pa}(a,b)$ gilt

$$\begin{aligned} EX &= \frac{ab}{b-1}, b > 1 \\ \text{Var } X &= \frac{a^2b}{(b-2)(b-1)^2}, b > 2 \\ \text{Med}(X) &= \{a2^{1/b}\}. \end{aligned}$$

Beta-Verteilung Be(p, q)

λ^1 -Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} 1_{(0,1)}(x), x \in \mathbb{R},$$

$p > 0, q > 0$. $\text{Be}(p,p)$ ($p=q$) ist symmetrisch um $1/2$. Es gilt $\text{Be}(1,1) = U(0,1)$.

Für $X \sim \text{Be}(p, q)$ gilt

$$\begin{aligned} EX &= \frac{p}{p+q}, \\ \text{Var } X &= \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \end{aligned}$$