

Einführung in Mehrgitterverfahren

Andreas Sommer

e-mail: somm4701@uni-trier.de

Im Mai 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Mehrgitterverfahren – Wozu und wie?	3
1.1	Die Idee	3
1.2	Einsatzmöglichkeiten	3
2	Bezeichnungen und Definitionen	4
2.1	Gitter und Gitterfolge	4
2.2	Prolongation	4
2.2.1	Definition	4
2.2.2	Beispiel	5
2.3	Restriktion	5
2.3.1	Definition	5
2.3.2	Beispiel	6
3	Diskretisierung der Poisson-Gleichung und Konvergenzunter-	7
	suchung des Jacobi-Relaxationsverfahrens	
3.1	Diskretisierung	7
3.2	Beispiel	8
3.3	Jacobi-Relaxationsverfahren	9
3.3.1	Eigenwertbetrachtung	9
3.3.2	Lemma	10
3.3.3	Fehlerbetrachtung	11
3.3.4	Konvergenzeigenschaften	11
4	Zweigitterverfahren	14
4.1	Vorbereitungen	14
4.2	Definition	15
4.3	Lemma	16
4.4	Definition und Lemma	16
4.5	Definition (Zweigitterverfahren)	17
4.6	Satz	17
4.7	Algorithmus: Zweigitterverfahren	19
5	Mehrgitterverfahren	20
5.1	Algorithmus: Mehrgitterverfahren	20
5.2	Aufwandsbetrachtung	22
5.3	Das vollständige Mehrgitterverfahren (nested iterations, full multigrid method (FMGM))	23

1 Mehrgitterverfahren – Wozu und wie?

1.1 Die Idee

Differentialgleichungen lassen sich mit numerischen Methoden nicht exakt lösen, sondern nur approximativ. Um iterative Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen anwenden zu können, bedarf es einer Diskretisierung der Differentialgleichungen. Es ist einleuchtend, dass die genäherte Lösung umso exakter ist, je feiner diese Diskretisierung vorgenommen wird. Ebenso offenbar steigt jedoch der erforderliche Rechen- und Speicherplatzaufwand mit kleinerer Schrittweite des Diskretisierungsgitters.

An dieser Stelle treten Mehrgitterverfahren ans Werk. Der bei Mehrgitterverfahren auftretende Fehler ist sehr glatt. Um den Fehler auf einem feinen Gitter zu behandeln, kann man also auf gröberen Gittern arbeiten, was zu einer enormen Effizienzsteigerung führt.

1.2 Einsatzmöglichkeiten

Im Rahmen dieser Einführung wollen wir uns die Arbeitsweise von Mehrgitterverfahren anhand der beim eindimensionalen Dirichlet-Randwertproblem auftretenden linearen Gleichungssysteme veranschaulichen.

Dies ist jedoch keineswegs das einzige Einsatzgebiet. Mehrgitterverfahren finden weitere vielseitige Verwendung. Neben der im Folgenden im Spezialfall der Poisson-Gleichung betrachteten Diskretisierung elliptischer Randwertprobleme auch zur Konvergenzbeschleunigung von anderen Lösungsverfahren. Am Rande sei noch erwähnt, dass sie auch bei nicht-linearen Gleichungssystemen, wie sie bspw. bei der Lösung von Navier-Stokes-Gleichungen entstehen, eingesetzt werden.

2 Bezeichnungen und Definitionen

Bereits an dieser Stelle wollen wir einige später verwendete Begriffe einführen, um diese nicht an ungünstigerer Stelle definieren zu müssen.

2.1 Gitter und Gitterfolge

Gitter dienen zur Diskretisierung von Funktionen; in unserem Fall der der Poisson-Gleichung.

Die Menge $\Omega_h = \{\frac{j}{h} \mid j = 1, \dots, h-1\}$ bezeichnen wir als *Gitter über dem Intervall $(0, 1)$ mit Schrittweite $1/h$* .

Wir betrachten im Folgenden die durch die *Schrittweitenfolge* $(h_\ell)_{\ell=0}^\infty$ mit $h_0 = \frac{1}{2}$ und $h_\ell = \frac{h_0}{2^\ell}$ definierte *Gitterfolge*

$$\Omega_\ell := \Omega_{h_\ell} = \{j \cdot h_\ell \mid j = 1, \dots, N_\ell\} \quad \text{für } \ell = 0, 1, \dots$$

wobei $N_\ell := 2^{\ell+1} - 1$ die Anzahl der Gitterpunkte ist.

Die Zahl ℓ wird als *Stufenindex* bezeichnet.

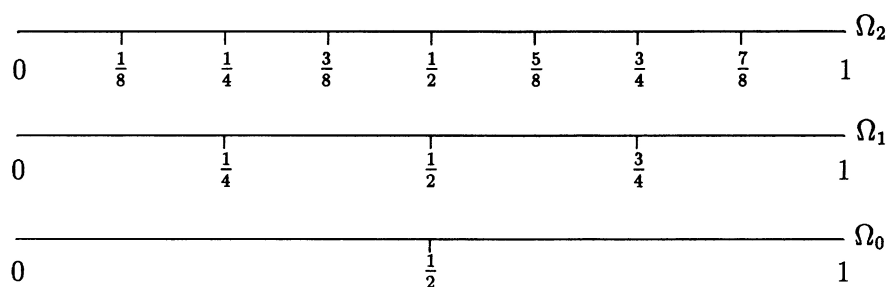


Abbildung 1: Beispiel einer Gitterhierarchie

2.2 Prolongation

Als Prolongation bezeichnen wir eine Abbildung von einem groben Gitter auf ein feineres.

2.2.1 Definition

Eine lineare, injektive Abbildung

$$P_{\ell-1}^\ell : \mathbb{R}^{N_{\ell-1}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_\ell}$$

heißt *Prolongation von $\Omega_{\ell-1}$ auf Ω_ℓ* .

3 Diskretisierung der Poisson-Gleichung und Konvergenzuntersuchung des Jacobi-Relaxationsverfahrens

Wir betrachten, wie eingangs erwähnt, ein einfaches Beispiel, um die Wirkungsweise des Mehrgitterverfahrens kennenzulernen.

Als „Untersuchungsobjekt“ dient uns das folgende eindimensionale Dirichlet-Randwertproblem (Poisson-Gleichung).

Gegeben: $\Omega = (0, 1)$ und $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$

Gesucht: $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) & \text{für } x \in \Omega \\ u(x) &= 0 & \text{für } x \in \partial\Omega = \{0, 1\} \end{aligned} \quad (1)$$

3.1 Diskretisierung

Zur Diskretisierung mittels einer zentralen Finite-Differenzen-Methode wird $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ mit der unter 2.1 definierten Gitterfolge Ω_{h_ℓ} versehen.

Wir schreiben

$$u_j^\ell := u(jh_\ell) \quad \text{für } j = 1, \dots, N_\ell := 2^{\ell+1} - 1$$

und

$$f_j^\ell := f(jh_\ell) \quad \text{für } j = 1, \dots, N_\ell$$

Aus

$$\begin{aligned} u''(jh_\ell) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(jh_\ell) \\ &\approx \frac{1}{h_\ell} \left(\underbrace{\frac{u_{j+1}^\ell - u_j^\ell}{h_\ell}}_{\approx u'(j+\frac{1}{2}h_\ell)} - \underbrace{\frac{u_j^\ell - u_{j-1}^\ell}{h_\ell}}_{\approx u'(j-\frac{1}{2}h_\ell)} \right) \\ &= \frac{1}{h_\ell^2} (u_{j+1}^\ell - 2u_j^\ell + u_{j-1}^\ell) \end{aligned}$$

folgt mit $f(jh_\ell) = -u''(jh_\ell)$ die diskrete Darstellung durch

$$\begin{aligned} -u_{j-1}^\ell + 2u_j^\ell - u_{j+1}^\ell &= h_\ell^2 f_j^\ell & \text{für } 1 \leq j \leq N_\ell \\ u_0^\ell &= 0 \\ u_{N_\ell+1}^\ell &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

3.3 Jacobi-Relaxationsverfahren

Zur Lösung des Gleichungssystems (3) betrachten wir das Jacobi-Relaxationsverfahren

$$u_{m+1}^\ell = u_m^\ell + \tilde{\omega} D_\ell^{-1} (f^\ell - A_\ell u_m^\ell) \quad \text{für } m = 0, 1, \dots$$

das aufgrund von $D_\ell^{-1} = (\text{diag}(a_{11}^\ell, \dots, a_{N_\ell N_\ell}^\ell))^{-1} = \frac{1}{2} h_\ell^2 I_{N_\ell}$ und mit $\omega = \frac{1}{2} \tilde{\omega}$ dargestellt werden kann als:

$$\begin{aligned} u_{m+1}^\ell &= u_m^\ell + \tilde{\omega} D_\ell^{-1} (f^\ell - A_\ell u_m^\ell) \\ &= u_m^\ell + \tilde{\omega} \cdot \frac{1}{2} h_\ell^2 \cdot (f^\ell - A_\ell u_m^\ell) \\ &= u_m^\ell + \omega h_\ell^2 \cdot (f^\ell - A_\ell u_m^\ell) \\ &= \underbrace{(I_{N_\ell} - \omega h_\ell^2 A_\ell)}_{=: M_\ell(\omega)} u_m^\ell + \underbrace{\omega h_\ell^2}_{=: N_\ell(\omega)} f^\ell \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Richardson-Verfahren mit $\Theta = \omega h_\ell^2$.

3.3.1 Eigenwertbetrachtung

Die Eigenvektoren $e^{\ell,j}$ der Matrix A_ℓ sind gegeben durch

$$e^{\ell,j} = \sqrt{2h_\ell} \begin{pmatrix} \sin j\pi h_\ell \\ \sin j\pi 2h_\ell \\ \vdots \\ \sin j\pi N_\ell h_\ell \end{pmatrix} \quad \text{für } j = 1, \dots, N_\ell \quad (4)$$

wie folgende Rechnung zeigt. Wir setzen zur besseren Übersicht $x := j\pi h_\ell$

$$\begin{aligned} A_\ell e^{\ell,j} &= \frac{1}{h_\ell^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \sqrt{2h_\ell} \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin 2x \\ \vdots \\ \sin(N_\ell - 1)x \\ \sin N_\ell x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h_\ell^2} \sqrt{2h_\ell} \begin{pmatrix} 0 & + & 2 \sin x & - & \sin 2x \\ -\sin x & + & 2 \sin 2x & - & \sin 3x \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\sin(N_\ell - 2)x & + & 2 \sin(N_\ell - 1)x & - & \sin N_\ell x \\ -\sin(N_\ell - 1)x & + & 2 \sin N_\ell x & - & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{=}{\text{sin ungerade}} \quad \frac{1}{h_\ell^2} \sqrt{2h_\ell} \begin{pmatrix} \sin -0x & + & 2 \sin x & + & \sin -2x \\ \sin -x & + & 2 \sin 2x & + & \sin -3x \\ \vdots & & \vdots & + & \vdots \\ \sin -(N_\ell - 2)x & + & 2 \sin(N_\ell - 1)x & + & \sin -N_\ell x \\ \sin -(N_\ell - 1)x & + & 2 \sin N_\ell x & + & \sin -(N_\ell + 1)x \end{pmatrix} \\
& \stackrel{=}{\text{Add.-Theorem}} \quad \frac{1}{h_\ell^2} \sqrt{2h_\ell} \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin x \\ 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin 2x \\ \vdots \\ 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(N_\ell - 1)x \\ 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin N_\ell x \end{pmatrix} \\
& = \quad \frac{4}{h_\ell^2} \sin^2\left(\frac{j\pi h_\ell}{2}\right) \sqrt{2h_\ell} \begin{pmatrix} \sin(j\pi h_\ell) \\ \sin 2(j\pi h_\ell) \\ \vdots \\ \sin(N_\ell - 1)(j\pi h_\ell) \\ \sin N_\ell(j\pi h_\ell) \end{pmatrix} \\
& = \quad \underbrace{\frac{4}{h_\ell^2} \sin^2\left(\frac{j\pi h_\ell}{2}\right)}_{=:\lambda^{\ell,j}} e^{\ell,j} \quad \text{für } j = 1, \dots, N_\ell
\end{aligned}$$

wobei durch $\lambda^{\ell,j}$ die Eigenwerte der Matrix A_ℓ gegeben sind.

Wegen $M_\ell(\omega) = I_{N_\ell} - \omega h_\ell^2 A_\ell$ stimmen die Eigenvektoren von A_ℓ und $M_\ell(\omega)$ überein, und die Eigenwerte der Iterationsmatrix lauten:

$$\lambda^{\ell,j}(\omega) = 1 - 4\omega \sin^2\left(\frac{j\pi h_\ell}{2}\right) \quad \text{für } j = 1, \dots, N_\ell \quad (5)$$

3.3.2 Lemma

Die durch Gleichung (4) gegebene Menge $\{e^{\ell,1}, \dots, e^{\ell,N_\ell}\}$ ist eine Orthonormal-Basis des \mathbb{R}^{N_ℓ} .

Beweis: Da $A_\ell \in \mathbb{R}^{N_\ell \times N_\ell}$ symmetrisch ist, besitzt sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^{N_ℓ} aus Eigenvektoren (vgl. Satz 11.16, LA I). Die Behauptung folgt mit $\|e^{\ell,j}\|_2 = 1$ für alle $j = 1, \dots, N_\ell$.

3.3.3 Fehlerbetrachtung

Aufgrund des Lemmas 3.3.2 lässt sich der Fehler zwischen dem Startvektor u_0^ℓ und der exakten Lösung $u^{\ell,*}$ schreiben als

$$u_0^\ell - u^{\ell,*} = \sum_{j=1}^{N_\ell} \alpha_j e^{\ell,j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}$$

und wir erhalten wegen $u_1^\ell = M_\ell(\omega)u_0^\ell + N_\ell(\omega)f^\ell$ damit:

$$\begin{aligned} u_1^\ell - u^{\ell,*} &= M_\ell(\omega)u_0^\ell + N_\ell(\omega)f^\ell - (M_\ell(\omega)u^{\ell,*} + N_\ell(\omega)f^\ell) \\ &= M_\ell(\omega)(u_0^\ell - u^{\ell,*}) \\ &= M_\ell(\omega) \cdot \sum_{j=1}^{N_\ell} \alpha_j e^{\ell,j} \\ &= \sum_{j=1}^{N_\ell} \alpha_j M_\ell(\omega) e^{\ell,j} \\ &= \sum_{j=1}^{N_\ell} \alpha_j \lambda^{\ell,j}(\omega) e^{\ell,j} \end{aligned}$$

und wegen der Konsistenz des Jacobi-Verfahrens folgt iterativ:

$$u_m^\ell - u^{\ell,*} = \sum_{j=1}^{N_\ell} \alpha_j [\lambda^{\ell,j}(\omega)]^m e^{\ell,j} \quad \text{für } m = 0, 1, \dots$$

3.3.4 Konvergenzeigenschaften

Betrachten wir den Fall der $\ell=3$ -ten Stufe, so erhalten wir beim Jacobi-Verfahren ($\omega = \frac{1}{2}$) die in Abbildung 4 Verteilung der Eigenwerte:

Aus der linken Grafik von Abbildung 4 kann man erkennen, dass das Jacobi-Verfahren einen schnellen Abfall der im mittleren Frequenzbereich befindlichen Fehlerkomponenten liefert (da dort die Eigenwerte $\ll 1$ sind), während die hoch- und niedrigfrequenten Fehleranteile nur schlecht gedämpft werden (dort sind die Eigenwerte ≈ 1). Wie man auf der rechten Grafik sieht, bietet das gedämpfte Jacobi-Verfahren eine für unsere Zwecke bessere Eigenwertverteilung.

Es gilt stets:

$$\lambda^{\ell,1} \left(\frac{1}{2} \right) = -\lambda^{\ell,N_\ell} \left(\frac{1}{2} \right) = \rho \left(M_\ell \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

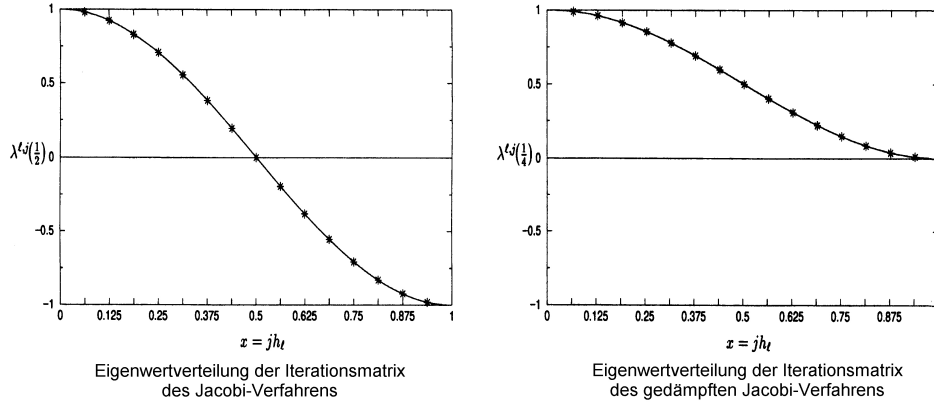


Abbildung 4: Eigenwertverteilungen des ungedämpften (links) und des gedämpften Jacobi-Verfahrens (rechts)

so dass der Spektralradius der Iterationsmatrix nicht durch eine Relaxation des Jacobi-Verfahrens verkleinert werden kann.

Weiter ist erkennbar, dass bei feinerem Gitter (also mit steigender Stufenzahl ℓ) der Spektralradius der Iterationsmatrix $\rho(M_\ell(1/2))$ sich sehr schnell der Eins nähert, die Konvergenz also schnell schlechter wird. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Taylorentwicklung des Spektralradius nach der Schrittweite. Doch zunächst gilt:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \rho(M_\ell(\omega)) &= \max_{j=1, \dots, N_\ell} |\lambda^{\ell, j}(\omega)| \\ &= 1 - 4\omega \sin^2\left(\frac{\pi h_\ell}{2}\right) \\ &= 1 - 4\omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi h_\ell}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)^2 \\ &= 1 - 4\omega \left(\frac{\pi h_\ell}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi h_\ell}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)^2 \\ &= 1 - 4\omega \left(\frac{\pi^2 h_\ell^2}{4} - \mathcal{O}(h_\ell^4) \right) \\ &= 1 - \omega \pi^2 h_\ell^2 + \mathcal{O}(h_\ell^4) \end{aligned}$$

Der Spektralradius konvergiert also quadratisch (!) mit der Schrittweite gegen 1, so dass eine Verfeinerung des Gitters nicht nur den Rechenaufwand pro Iteration erhöht, sondern auch eine drastische Reduktion der Konvergenzgeschwindigkeit mit sich bringt.

Mit $\omega = \frac{1}{2}$ erhält man zwar die optimale Konvergenzgeschwindigkeit für das Jacobi-Verfahren, allerdings werden, wie in Abbildung 4 links zu sehen ist, sowohl hoch- als auch niederfrequente Fehleranteile nur schlecht gedämpft. Für unsere Zwecke ist es jedoch erforderlich, eine starke Dämpfung der hochfrequenten Fehleranteile auf dem feinsten Gitter zu erhalten. Mit der Wahl von $\omega = \frac{1}{4}$ erreichen wir dies, wie die rechte Grafik in Abbildung 4 zeigt. Im Folgenden sei also $\omega = \frac{1}{4}$.

4 Zweigitterverfahren

Bevor wir in Abschnitt 4.5 zur Definition von Zweigitter(iterations)-Verfahren kommen, benötigen wir zunächst ein paar Ergebnisse, die uns die folgenden Abschnitte liefern.

4.1 Vorbereitungen

Die j -malige Iteration des Jacobi-Verfahrens auf der ℓ -ten Stufe liefert einen weitgehend glatten Fehler

$$e_j^\ell = u_j^\ell - u^{\ell,*}$$

der sich, aufgrund seiner Glattheit, auf dem nächst größeren Gitter $\Omega_{\ell-1}$ mit deutlich weniger Rechenaufwand annähern lässt. Betrachten wir den *Defekt*

$$d_j^\ell := A_\ell u_j^\ell - f^\ell$$

so erhalten wir:

$$A_\ell e_j^\ell = A_\ell(u_j^\ell - u^{\ell,*}) = A_\ell u_j^\ell - \underbrace{A_\ell u^{\ell,*}}_{=f^\ell} = d_j^\ell$$

Lösen wir diese Gleichung auf dem groben Gitter $\Omega_{\ell-1}$ und prolongieren wir den so berechneten Vektor auf das feinere Gitter Ω_ℓ , so erhalten wir eine Näherung an den Fehler e_j^ℓ .

Dazu bilden wir den Defekt d_j^ℓ auf das gröbere Gitter $\Omega_{\ell-1}$ vermöge der Vorschrift $d^{\ell-1} = R_\ell^{\ell-1} d_j^\ell$ ab, und erhalten aus der exakten Lösung der Defekt-Gleichung

$$A_{\ell-1} e^{\ell-1} = d^{\ell-1} = R_\ell^{\ell-1} d_j^\ell$$

durch die Prolongation $P_{\ell-1}^\ell$ auf das Ausgangsgitter Ω_ℓ eine Approximation an den gesuchten Fehlervektor e_j^ℓ :

$$e_j^\ell \approx P_{\ell-1}^\ell e^{\ell-1} = P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} d^{\ell-1}$$

Mit Kenntnis diesen Fehlers, können wir die Näherungslösung u_j^ℓ korrigieren:

$$u_j^{\ell,neu} = u_j^\ell - e_j^\ell = u_j^\ell - P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} (A_\ell u_j^\ell - f^\ell)$$

4.2 Definition

Ist durch u_j^ℓ eine Näherungslösung von $A_\ell u^{\ell,*} = f^\ell$ gegeben, dann heißt die Methode

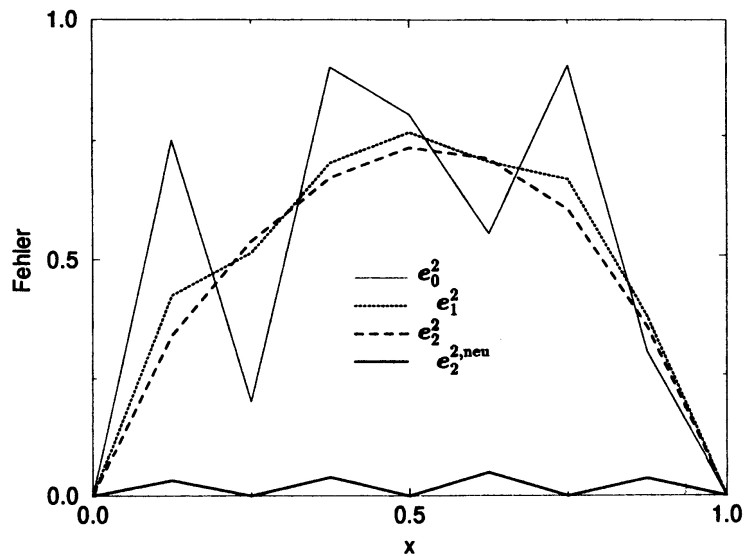
$$u_j^{\ell,neu} = \phi_\ell^{GGK}(u_j^\ell, f^\ell)$$

mit

$$\phi_\ell^{GGK}(u_j^\ell, f^\ell) = u_j^\ell - P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} (A_\ell u_j^\ell - f^\ell)$$

Grobgitterkorrekturverfahren.

In der Abbildung 5 ist die Entwicklung des Fehlers $e_0^2 = (0.75, 0.2, 0.9, 0.8, 0.55, 0.9, 0.3)$ dargestellt. Wie man gut erkennt, führen bereits zwei Durchführungen des gedämpften Jacobi-Relaxationsverfahrens zu einem sehr glatten Fehler, der durch einmalige Grobgitterkorrektur sehr klein wird.



Entwicklung des Fehlers beim Zweigitterverfahren

Abbildung 5: Entwicklung des Fehlers beim Zweigitterverfahren

4.3 Lemma

Das Grobgitterkorrekturverfahren ϕ_ℓ^{GGK} ist ein lineares konsistentes aber nicht konvergentes Iterationsverfahren mit

$$\begin{aligned} M_\ell^{GGK} &= I - P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} A_\ell \\ N_\ell^{GGK} &= P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} \end{aligned}$$

Beweis: Offenbar sind $M_\ell^{GGK}, N_\ell^{GGK} \in \mathbb{R}^{N_\ell \times N_\ell}$ und es gilt ebenso offensichtlich $M_\ell^{GGK} = I - N_\ell^{GGK} A_\ell$, so dass die Konsistenz bewiesen ist¹. Weiter sei $0 \neq v \in \ker(R_\ell^{\ell-1})$ (wohldefiniert, da $N_\ell > N_{\ell-1}$). Setzt man $\omega := A_\ell^{-1} v \neq 0$ folgt die Gleichung

$$M_\ell^{GGK} \omega = \omega - \underbrace{P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} \underbrace{A_\ell \omega}_{=v}}_{=0} = \omega$$

Also ist ω ein Eigenvektor von M_ℓ^{GGK} zum Eigenwert $\lambda = 1$ und damit gilt $\rho(M_\ell^{GGK}) \geq 1$, also ist das Grobgitterkorrekturverfahren nicht konvergent².

4.4 Definition und Lemma

Sind $\phi, \psi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ zwei lineare Iterationsverfahren mit Iterationsmatrizen M_ϕ und M_ψ , dann heißt

$$\phi \circ \psi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

mit

$$x_{m+1} = (\phi \circ \psi)(x_m, b) := \phi(\psi(x_m, b), b)$$

Produktiteration, und es gilt:

1. Sind ϕ und ψ konsistent, dann ist auch die Produktiteration $\phi \circ \psi$ konsistent.
2. Die Iterationsmatrix der Produktiteration $\phi \circ \psi$ hat die Form

$$M_{\phi \circ \psi} = M_\phi M_\psi$$

¹vgl. A. Meister, Numerik linearer Gleichungssysteme. Vieweg. 1: 56f. (Satz 4.4), 1999
²ebenda, 57f. (Satz 4.5)

Beweis:

1. Mit $x^* = A^{-1}b$ folgt die Konsistenz der Produktiteration aus der Konsistenz der beiden Verfahren ϕ und ψ :

$$(\phi \circ \psi)(x^*, b) = \phi(\psi(x^*, b), b) = \phi(x^*, b) = x^*$$

2. Mit $\phi(x_m, b) = M_\phi x_m + N_\phi b$ und $\psi(x_m, b) = M_\psi x_m + N_\psi b$ folgt die Behauptung durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} (\phi \circ \psi)(x_m, b) &= M_\phi(M_\psi x_m + N_\psi b) + N_\phi b \\ &= \underbrace{M_\phi M_\psi}_{=M_{\phi \circ \psi}} x_m + \underbrace{(M_\phi N_\psi + N_\phi)}_{=N_{\phi \circ \psi}} b. \end{aligned}$$

Da sich lineare Iterationsverfahren, wie z.B. die hier betrachtete Jacobi-Methode, glättend auf den Fehler auswirken, werden wir sie im Folgenden als *Glätter* bezeichnen.

4.5 Definition (Zweigitterverfahren)

Das *Zweigitterverfahren* (oder: *Zweigittermethode*, *ZGM*) ist eine Produktiteration der Form

$$\phi_\ell^{ZGM(\nu_1, \nu_2)} = \phi_\ell^{\nu_2} \circ \phi_\ell^{GGK} \circ \phi_\ell^{\nu_1}$$

wobei $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}_0$ sind.

Man spricht dann von ν_1 *Vorglättungen* und ν_2 *Nachglättungen* mit dem Glättungsverfahren ϕ_ℓ .

4.6 Satz

Ist ϕ_ℓ ein konvergentes, konsistentes Iterationsverfahren mit Iterationsmatrix M_ℓ , dann ist das Zweigitterverfahren $\phi_\ell^{ZGM(\nu_1, \nu_2)}$ konvergent und konsistent und hat die Iterationsmatrix

$$M_\ell^{ZGM(\nu_1, \nu_2)} = M_\ell^{\nu_2} \left(I - P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} A_\ell \right) M_\ell^{\nu_1}$$

Beweis: Nach Lemma 4.3 ist die Grobgitterkorrektur ϕ_ℓ^{GGK} konsistent. Mit Lemma 4.4.(1) ist das Zweigitterverfahren also ebenfalls konsistent und Lemma 4.4.(2) liefert zusammen mit der Iterationsmatrix des Grobgitterkorrekturverfahrens aus Lemma 4.3:

$$\begin{aligned} M_\ell^{ZGM(\nu_1, \nu_2)} &= M_{\phi_\ell^{\nu_2} \circ \phi_\ell^{GGK} \circ \phi_\ell^{\nu_1}} \\ &= M_{\phi_\ell^{\nu_2}} M_{\phi_\ell^{GGK}} M_{\phi_\ell^{\nu_1}} \\ &= M_\ell^{\nu_2} \left(I - P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} A_\ell \right) M_\ell^{\nu_1} \end{aligned}$$

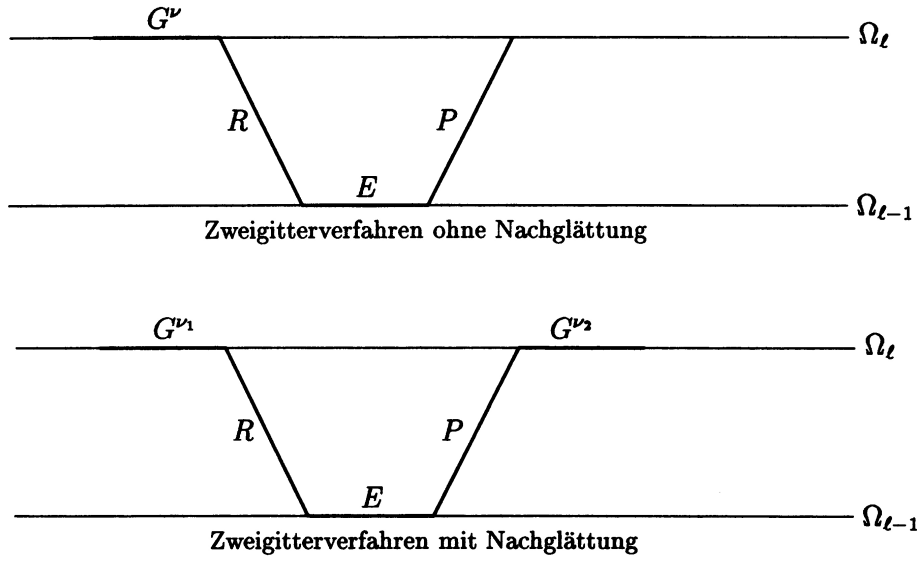


Abbildung 6: Schema der Zweigittermethode

Es bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Es gilt (mit $\nu = \nu_1 + \nu_2$):

$$\begin{aligned}
 \|M_\ell^{ZGM(\nu_1, \nu_2)}\| &= \|M_\ell^{\nu_2} (I - P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} A_\ell) M_\ell^{\nu_1}\| \\
 &= \|M_\ell^{\nu_2}\| \underbrace{\|I - P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} A_\ell\|}_{=:c \text{ (=const)}} \|M_\ell^{\nu_1}\| \\
 &\leq \|M_\ell\|^{\nu_2} \|M_\ell\|^{\nu_1} \\
 &= \|M_\ell\|^\nu \cdot c
 \end{aligned}$$

Da ϕ_ℓ konvergent ist, folgt, dass eine Norm existiert mit $\|M_\ell\| < 1$. Da c konstant, gilt für ν genügend groß:

$$\|M_\ell^{ZGM(\nu_1, \nu_2)}\| < 1$$

Also ist das Zweigitterverfahren konvergent.

Bemerkung: Zur Vor- und Nachglättung können auch verschiedene Glättungsalgorithmen zum Einsatz kommen.

4.7 Algorithmus: Zweigitterverfahren

Wir verwenden Pseudo-Code, um den Algorithmus für das vorgestellte Zweigitterverfahren anzugeben.

```
for  $i = 1, \dots, \nu_1$   
     $u^\ell := \phi_\ell(u^\ell, f^\ell)$   
end  
 $d^{\ell-1} := R_\ell^{\ell-1}(A_\ell u^\ell - f^\ell)$   
 $e^{\ell-1} := A_{\ell-1}^{-1} d^{\ell-1}$   
 $u^\ell := u^\ell - P_{\ell-1}^\ell e^{\ell-1}$   
for  $i = 1, \dots, \nu_2$   
     $u^\ell := \phi_\ell(u^\ell, f^\ell)$   
end
```

5 Mehrgitterverfahren

Beim Zweigitterverfahren (Abschnitt 4) benötigt man die exakte Lösung der Korrekturgleichung

$$A_{\ell-1}e^{\ell-1} = d^{\ell-1} \quad (6)$$

auf dem Gitter $\Omega_{\ell-1}$. Für große Systeme ist dies nur sehr aufwändig zu berechnen.

Da die Korrektur der Näherungslösung u_j^ℓ jedoch nur mittels einer Prolongation von $e^{\ell-1}$ auf das feine Gitter Ω_ℓ erfolgt, ist auch eine approximative Lösung der Korrekturgleichung (6) ausreichend.

Man sieht, dass die Gleichung (6) die gleiche Form aufweist, wie das Ausgangsproblem $A_\ell u^\ell = f^\ell$. Es liegt also nahe, das Zweigitterverfahren rekursiv einzusetzen. Lediglich auf dem größten Gitter Ω_0 muss dann noch die Gleichung

$$A_0 e^0 = d^0$$

gelöst werden. In unserem Beispiel ist $A_0 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ und ist damit sehr einfach zu lösen.

Natürlich verwendet man in der Praxis für Ω_0 nicht eine einpunktige Menge, sondern ein Gitter, das eine approximative Lösung des Gleichungssystems $A_0 e^0 = d^0$ auf effiziente und einfache Weise ermöglicht.

5.1 Algorithmus: Mehrgitterverfahren

Im folgenden Pseudo-Code werden zur iterativen Lösung der Grobgittergleichung γ Schritte verwendet. Es hat sich in der Praxis herausgestellt, dass $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$ geeignete Werte sind.

Im Fall $\gamma = 1$ erhält man den sogenannten V-Zyklus, der in Abbildung 7 oben dargestellt ist, im Fall $\gamma = 2$ den W-Zyklus (Abbildung 7 unten)

```
if ( $\ell = 0$ )  
     $u^0 := A_0^{-1} f^0$   
    return  $u^0$   
else  
    for  $i = 1, \dots, \nu_1$   
         $u^\ell := \phi_\ell(u^\ell, f^\ell)$   
    end  
     $d^{\ell-1} := R_\ell^{\ell-1}(A_\ell u^\ell - f^\ell)$   
     $e_0^{\ell-1} := 0$ 
```

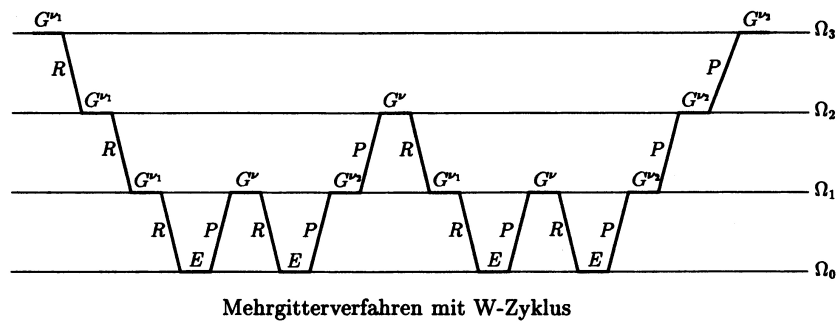
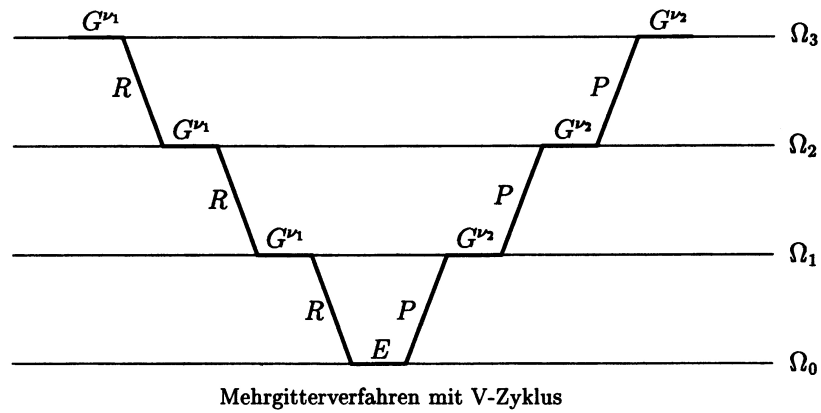


Abbildung 7: V- (oben) und W-Zyklus (unten) beim Mehrgitterverfahren

```

for i = 1, ..., gamma
    e_i^{l-1} := phi_{l-1}^{MGM(nu_1, nu_2)}(e_{i-1}^{l-1}, d^{l-1})
end
u^l := u^l - P_{l-1}^l e^{l-1}
for i = 1, ..., nu_2
    u^l := phi_l(u^l, f^l)
end
return u^l
end

```

Der Aufruf erfolgt durch: $\phi_\ell^{MGM(\nu_1, \nu_2)}(u^\ell, f^\ell)$

5.2 Aufwandsbetrachtung

Betrachtet man die Iterationsmatrix des Zweigitterverfahrens auf der ℓ -ten Stufe

$$M_\ell^{ZGM(\nu_1, \nu_2)} = M_\ell^{\nu_2} (I - P_{\ell-1}^\ell A_{\ell-1}^{-1} R_\ell^{\ell-1} A_\ell) M_\ell^{\nu_1}$$

so sieht man, dass sich der Aufwand des Mehrgitterverfahren im Wesentlichen sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} C(\ell) &= cN_\ell + \underbrace{C(\ell-1)}_{\text{Grobitterkorrektur}} \\ &= cN_\ell + cN_{\ell-1} + C(\ell-2) \\ &\quad \vdots \\ &= cN_\ell + cN_{\ell-1} + \cdots + cN_0 \\ &= c(N_\ell + N_{\ell-1} + \cdots + N_0) \\ &= c(2^{\ell+1} + 2^\ell + \cdots + 2^1) \\ &\leq 2^{\ell+2}c = 2cN_\ell \end{aligned}$$

wobei c der konstante Aufwand für Matrix-Vektor-Operationen ist.

Der Gesamtaufwand beim Mehrgitterverfahren ist also kleiner als der für zwei vollständige Iterationen auf dem feinsten Gitter Ω_ℓ erforderliche Aufwand. Hier wird die Effizienz des Mehrgitterverfahrens sehr deutlich.

5.3 Das vollständige Mehrgitterverfahren (nested iterations, full multigrid method (FMGM))

Es ist leicht einzusehen, dass eine schlechte Startlösung u_0^ℓ auf dem feinsten Gitter Ω_ℓ für die schnelle Lösungsfindung von Nachteil ist.

Die Idee des FMGM ist daher die Nutzung der größeren Gitter zur Verbesserung der Startnäherung. Dies wird erreicht, indem man die Gleichung $A_0 u^0 = f^0$ auf Ω_0 exakt löst, das Ergebnis auf das nächstfeinere Gitter prolongiert und dort einige Iterationsschritte mit dem Glättungsverfahren durchführt. Dann prolongiert man wieder auf das nächstfeinere Gitter und fährt so fort, bis eine Näherungslösung u_0^ℓ auf dem feinsten Gitter Ω_ℓ errechnet wurde. Mit dieser startet man das Mehrgitterverfahren.

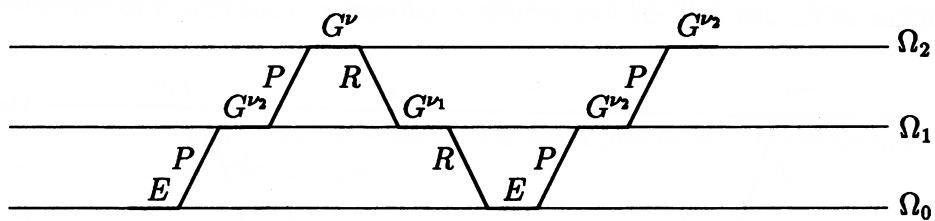


Abbildung 8: Schema des vollständigen Mehrgitterverfahrens