J. Müller / M. Reinhard WS 2004/2005

04.02.2005

Klausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Aufgabe 1 (2+2+1 Punkte)
Überprüfen Sie für die folgenden Mengensysteme $\mathcal{S}$, welche der Bedingungen $(\sigma 1), (\sigma 2), (\sigma 3)$ erfüllt sind

(i) $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$

(ii) $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abzählbar}\}$

(iii) $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ oder } A^c \text{ offen}\}$

Aufgabe 2 (1+2+1 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{S})$ ein Messraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Ist f $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$-messbar, so ist $\{f = \alpha\} \in \mathcal{S}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Ist $f(\Omega)$ abzählbar und $\{f = \alpha\} \in \mathcal{S}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist f $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$-messbar.

c) Ist die Aussage von b) auch richtig ohne die Bedingung „$f(\Omega)$ abzählbar“ ?

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$f(t) := \frac{1}{2} e^{-|t|} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a) Zeigen Sie: Durch
$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (x \in \mathbb{R})$$
ist eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ definiert.

b) Es sei Q_F die zugehörige Verteilung auf $\mathcal{B}$. Berechnen Sie $E(X^+)$, $E(X^-)$ und, falls existent, EX für eine Q_F-verteilte Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum ist.

Aufgabe 4 (1+2+3 Punkte)
Es sei (a_j) eine Folge in $[0,\infty)$ mit $a_j > 0$ für ein j und so, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ den Konvergenzradius $R > 0$ hat. Für $p \in (0,R)$ sei

$$g(p) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j \ .$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $p \in (0,R)$ durch

$$f_p(j) := a_j p^j / g(p) \qquad (j \in \mathbb{N}_0)$$

die Zähldichte eines W-Maßes Q_p auf $\mathbb{N}_0$ gegeben ist.

b) Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum und $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine Q_p -verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass gilt

$$EX = p \cdot g'(p)/g(p) \ .$$

c) Wie lassen sich entsprechend $E(X^2)$ und $\mathrm{Var}(X)$ durch g ausdrücken?

Aufgabe 5 (3+1+2 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Berechnen Sie $N_p(f)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ für

$$\text{(i)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} 1_{[1,\infty)}(x), \quad \text{(ii)} \quad f(x) = \infty \cdot 1_{\mathbb{Q}}(x), \quad \text{(iii)} \quad f(x) = e^x 1_{[0,1]}(x) \ .$$

Aufgabe 6 (3+3 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, und es sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S})$ mit $f_n \to f$ μ-f.ü. und $g := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$.

a) Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

b) Gilt die Aussage aus a) auch ohne die Voraussetzung der Endlichkeit von μ?

Aufgabe 7 (3 Punkte)
Beim Bundesliga-Fußball werden N Schiedsrichter eingesetzt, von denen $n \leq N$ mit der Wettmafia zusammmenarbeiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann zumindest einer überführt werden, wenn m der Schiedsrichter überprüft werden (und die Überprüfung auch stets erfolgreich verläuft)?