J. Müller / M. Reinhard

WS 2004/2005
05.01.2005

8. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G15: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S})$ beschränkt, so ist f μ-integrierbar und es gilt

$$|\int f d\mu| \;\leq\; \sup_{\Omega} |f(\omega)| \cdot \mu(\Omega) \quad .$$

G16: Es sei $E \in \mathcal{B}_m$ mit $0 < \lambda^m(E) < \infty$.

a) Zeigen Sie: Für die Gleichverteilung U_E bezüglich E gilt

$$U_E \;=\; \left(\frac{1}{\lambda^m(E)} \cdot 1_E\right) \lambda^m \,.$$

b) Es sei speziell $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Berechnen Sie EX für eine $U_{[a,b]}$-verteilte Zufallsvariable X.

Hausübungen

H22: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, und es seien $f, f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S})$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_n \to f$ und $|f_n| \leq |f|$ $(n \in \mathbb{N})$.

(i) Zeigen Sie: Ist $f_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so gilt

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \quad .$$

(ii) Gilt dies auch ohne die Voraussetzung $f_n \geq 0$?

H23: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum. Berechnen Sie EX^+, EX^- und, falls existent, EX für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die

(i) normalverteilt ist mit Parametern $0, 1$,

(ii) Cauchy-verteilt ist mit Parameter α.

H24: a) Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum, $(\Theta, \mathcal{T})$ ein Messraum und $X : \Omega \to \Theta$ eine Zufallsvariable. Ferner sei $B_0 \in \mathcal{T}$ mit $P(X \notin B_0) = 0$.
Zeigen Sie: Ist $\Omega_0 := X^{-1}(B_0)$, $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S} \cap \Omega_0$, $P_0 := P_{|\mathcal{S}_0}$ und $X_0 := X_{|\Omega_0}$, so gilt $P^X = P_0^{X_0}$ (d. h. X und X_0 sind verteilungsgleich).

b) Es sei nun $(\Theta, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und B_0 abzählbar. Zeigen Sie: Existiert EX, so gilt

$$EX = \sum_{x \in B_0} x \cdot P(X = x) \,.$$