J. Müller / M. Reinhard WS 2004/2005

15.12.2004

7. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G13: Für $p \in [0,1)$ sei $f : \mathbb{N}_0 \to [0,\infty)$ definiert durch $f(j) := (1-p)p^j$ $(j \in \mathbb{N}_0)$.

a) Überlegen Sie sich, dass f die Zähldichte einer Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ ist (der sog. geometrischen Verteilung mit Parameter p).

b) Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum, und es sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ geometrisch verteilt mit Parameter p. Berechnen Sie $\int X dP$.

G14: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P) = ([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1], U_{[0,1]})$. Geben Sie eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $X_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\int X_n \, dP \to \infty (n \to \infty)$ an.

Hausübungen

H19: Es sei $(\Omega, \mathcal{S})$ ein Messraum, und es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S})$.

a) Zeigen Sie:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \quad , \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \quad , \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \quad , \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S})$$

b) Es sei I überabzählbar und $f_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S})$ für $\alpha \in I$. Ist dann auch stets $\sup_{\alpha\in I} f_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S})$?

H20: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum, und es sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie $\int X^2 dP$ falls

(i) X Poisson-verteilt ist mit Parameter $\lambda > 0$,

(ii) X geometrisch verteilt ist mit Parameter $p \in [0,1)$.

H21: Es sei $(\Omega, \mathcal{S})$ ein Messraum, und es seien $\mu, \mu_n (n \in \mathbb{N})$ Maße auf $\mathcal{S}$ mit $\mu_n \uparrow \mu$ (d.h. $\mu_n(A) \uparrow \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$). Ferner sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$ mit $f_n \uparrow f$. Zeigen Sie:

$$\int f_n d\mu_n \ \uparrow \ \int f d\mu \quad (n \to \infty)$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $f_n = f (n \in \mathbb{N})$.

Frohe Weihnachten und alles Gute sowie viel Erfolg im Neuen Jahr wünschen Jürgen Müller und Martin Reinhard