J. Müller / M. Reinhard

WS 2004/2005
01.12.2004

5. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G9: Es seien $(\Omega, \mathcal{S})$ ein Messraum und Θ eine Menge. Ferner sei $f : \Omega \to \Theta$. Überlegen Sie sich, dass

$$\mathcal{T} := \{B \subset \Theta : f^{-1}(B) \in \mathcal{S}\}$$

eine σ-Algebra auf Θ ist, die $f^{-1}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{S}$ erfüllt.

G10: Zeigen Sie:

(i) Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

(ii) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die eine Stammfunktion (auf $\mathbb{R}$) besitzt, ist Borel-messbar.

Hausübungen

H13: Es sei $A \in \mathcal{B}_m$, und es seien $x_0 \in \mathbb{R}^m, r > 0$. Zeigen Sie: Für

$$x_0 + rA := \{x_0 + rx : x \in A\}$$

gilt $x_0 + rA \in \mathcal{B}_m$ und

$$\lambda^m(x_0 + rA) = r^m \lambda^m(A)\,.$$

H14: Auf $\mathbb{R}$ ist durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation gegeben. Es sei E eine Teilmenge von $(0, 1)$, die genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ enthält. Zeigen Sie

(i) Für alle $x \in (0, 1)$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x \in E + q$,

(ii) $(E + q_1) \cap (E + q_2) = \emptyset$ für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{Q},\ q_1 \neq q_2$,

(iii) $E \notin \mathcal{B}$.

H15: a) Es sei Ω eine Menge, und es seien $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ $\sigma-$Algebren auf Ω. In welchem Fall ist $\mathrm{id}_\Omega : (\Omega, \mathcal{S}) \to (\Omega, \mathcal{T})$ messbar?

b) Es sei nun $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\{f = \alpha\} \in \mathcal{S} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

i.A. nicht hinreichend für die $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$-Messbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Ist die Bedingung

$$\{f = \alpha\} \in \mathcal{B} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

stets hinreichend für die Borel-Messbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?