J. Müller / M. Reinhard

WS 2004/2005
17.11.2004

3. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G5: Es sei Ω eine Menge, und es sei $\alpha \in (0,\infty]$. Wir setzen für $A \subset \Omega$

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } A \text{ abzählbar} \\ \alpha & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

(i) Für alle $\alpha \in (0,\infty]$ ist $\mu|_{\mathcal{S}}$, wobei $\mathcal{S} := \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ ein Maß auf $\mathcal{S}$.

(ii) Für $\alpha = \infty$ ist μ ein Maß auf $\mathrm{Pot}(\Omega)$.

(iii) Für $\alpha \in (0,\infty)$ ist μ kein Maß auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$.

G6: Überlegen Sie sich, dass die P's aus B. 2.19.2 tatsächlich Wahrscheinlichkeitsmaße sind.

Hausübungen

H7: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Menge $S_f := \{x \in \mathbb{R} : \ f \text{ stetig an } x\}$ ist eine Borel-Menge.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$S_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : \exists\, \delta > 0 : \forall\, y, z \in U_\delta(x) : |f(y) - f(z)| < 1/n\}.$$

H8: Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,\infty]$ und gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, so gilt auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$ für alle bijektiven Abbildungen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

H9: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir setzen

$$\mathcal{M} := \{M \subset \Omega : \exists\, N \in \mathcal{S} : \mu(N) = 0,\ M \subset N\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\overline{\mathcal{S}} := \{A \cup M : A \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}\}$ ist eine σ-Algebra.

(ii) Durch

$$\overline{\mu}(B) := \mu(A) \qquad (B \in \overline{\mathcal{S}}) ,$$

wobei $B = A \cup M$ mit $A \in \mathcal{S},\ M \in \mathcal{M}$ ist ein Maß $\overline{\mu}$ auf $\overline{\mathcal{S}}$ (wohl-)definiert, das $\overline{\mu}|_{\mathcal{S}} = \mu$ erfüllt.

(iii) $(\Omega, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ ist vollständig.