J. Müller / M. Reinhard WS 2004/2005

16.02.2005

13. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G25: Zeigen Sie, dass i.A. die paarweise Unabhängigkeit dreier Zufallsvariable X_1, X_2, X_3 noch nicht die Unabhängigkeit impliziert.

G26: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum. Zeigen Sie:

a) $A, B \in \mathcal{S}$ sind genau dann unabhängig, wenn A, B^c unabhängig sind.

b) Sind $A, B, C \in \mathcal{S}$ unabhängig, so sind auch $A \cup B, C$ unabhängig.

G27: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum und $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m \subset \mathcal{S}$. Ferner existiere für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ eine Folge $(E_{n,j})_n$ in $\mathcal{A}_j$ mit $E_{n,j} \uparrow \Omega$. Zeigen Sie: Gilt

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_j\right) = \prod_{j=1}^{m} P(A_j)$$

für alle $A_j \in \mathcal{A}_j$; $j = 1, \ldots, m$, so sind $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ unabhängig.

Hausübungen

H37: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum, $\Theta_1, \ldots, \Theta_m$ abzählbare Mengen und $X_j : (\Omega, \mathcal{S}) \to (\Theta_j, \mathrm{Pot}(\Theta_j))$ Zufallsvariable $(j = 1, \ldots, m)$.
Zeigen Sie: Gilt für alle $(k_1, \ldots, k_m) \in \prod_{j=1}^{m} \Theta_j$

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{m} \{X_j = k_j\}\Big) = \prod_{j=1}^{m} P(X_j = k_j) \ ,$$

so sind $X_1, \ldots, X_m$ unabhängig.

H38: Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, nichtnegative Zufallsvariable, und es sei $Y := \max{(X_1, \ldots, X_n)}$.

a) Zeigen Sie: Ist F_j die zu P^{X_j} gehörige Verteilungsfunktion, so ist $\prod_{j=1}^{n} F_j$ die zu P^Y gehörige Verteilungsfunktion.

b) Berechnen Sie $E(Y)$ im Falle $P^{X_j} = \mathrm{Exp}(\tau)$ für alle $j = 1, \ldots, n$.