10. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G19: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Geben Sie jeweils eine μ-Dichte von ν an:

(i) $\mu = \lambda, \quad \nu = U_{[a,b]}$,

(ii) $\mu = N(0,1), \quad \nu = \lambda$.

G20: Es sei $(\Omega, \mathcal{S})$ ein Messraum, und es sei $h \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$. Zeigen Sie:

(i) Ist μ σ-endlich und $h < \infty$, so ist $h \cdot \mu$ σ-endlich.

(ii) Ist $h \cdot \mu$ σ-endlich und $0 < h < \infty$, so ist μ σ-endlich.

Hausübungen

H28: Es sei

$$L = \Big\{(a_j) \in \ell_2 \ : \ \exists\, n \in \mathbb{N} : \ a_j = 0 \ \ (j \geq n)\Big\}.$$

Zeigen Sie:

a) L ist ein Unterraum von ℓ_2 mit $\overline{L} = \ell_2$.

b) Ist $x \in \ell_2 \setminus L$, so existiert kein $y \in L$ mit $\operatorname{dist}(x, L) = \|x - y\|$.

H29: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Zeigen Sie: Ist f μ-integrierbar und gilt $\int_A f\, d\mu \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{S}$, so ist $f \geq 0$ μ-f.ü.

b) Es seien $h, \tilde{h} \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$ mit $h \cdot \mu = \tilde{h} \cdot \mu$.

(i) Zeigen Sie: Ist $h \cdot \mu$ σ-endlich, so ist $h = \tilde{h}$ μ-f.ü.

(ii) Gilt auch stets $h = \tilde{h}$ μ-f.ü., falls $h \cdot \mu$ nicht σ-endlich ist?

H30: Die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ sei definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1 \\ 1/2 + \arcsin(x)/\pi & , \quad x \in (-1,1) \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad .$$

Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist, und dass die zugehörige Verteilung Q_F absolutstetig bzgl. λ ist. Bestimmen Sie ferner eine λ-Dichte h von Q_F.