J. Müller WS 2003/2004

20.2.2004

Klausur zur Vorlesung Elemente der Analysis I

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} \nu\,!\,\nu = (n+1)\,!$$

Aufgabe 2: (2 + 2 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Normaldarstellung folgender komplexer Zahlen

$$\text{(i)} \quad z = \frac{2-i}{i} \quad , \qquad \text{(ii)} \quad w = (2-i)^2 \; .$$

b) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$z^2 = 2i$$

in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3: (2 + 2 + 3 Punkte)

Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

(i) $a_n = \dfrac{4n^3 + 3n}{5n^3 + 7}$,

(ii) $b_n = \left(1 - \dfrac{1}{n!}\right)^n$,

(iii) $c_n = \dfrac{1}{n^p} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)$, wobei $p \in \mathbb{N}$ fest ist.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ für

$$a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := a_n^2 + 1/4.$$

Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 6: (4 + 2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\sqrt[\nu]{4} - 1\right), \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{\nu=3}^{\infty} \binom{\nu}{3} / 2^{\nu} .$$

Aufgabe 7: (3 Punkte)

Die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ mit $a_\nu \neq -1$ sei absolut konvergent. Zeigen Sie: Dann ist auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{a_\nu}{1+a_\nu}$ absolut konvergent.

Aufgabe 8: (3 Punkte)

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + 1/n)^n \leq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu\,!} .$$