Zusatzaufgaben

Z1: Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$s_{2^k-1} = \sum_{\nu=1}^{2^k-1} \frac{1}{\nu} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\leq 2\cdot\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{7}}_{\leq 4\cdot\frac{1}{4}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^k-1}}_{\leq 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}} \leq k$$

($\Rightarrow s_{2^k} \leq k+1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$)

$\Longrightarrow$

$$2^k \cdot \frac{1}{2^k s_{2^k}} = \frac{1}{s_{2^k}} \geq \frac{1}{k+1}$$

also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \dfrac{1}{2^k s_{2^k}}$ divergent.

Außerdem: $\dfrac{1}{n s_n} \downarrow 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n s_n}$ divergent nach dem Cauchyschen Verdichtungssatz.

Z2: Geometrische Summenformel

$$\Rightarrow \quad x - 1 = \underbrace{(\sqrt[\nu]{x} - 1)}_{=d_\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} \underbrace{(\sqrt[\nu]{x})^j}_{\leq(\sqrt[\nu]{x})^\nu = x}$$

$$\Rightarrow \quad d_\nu \geq \frac{x-1}{x} \cdot \frac{1}{\nu} \quad (\nu \in \mathbb{N})$$

$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu}$ divergent $\Rightarrow$

$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\sqrt[\nu]{x} - 1)$ divergent nach dem Majoranten-Kriterium (indirekt).

Z3: $0 < \dfrac{\alpha}{\alpha+1} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\nu$ konvergent mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\nu = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\alpha+1}} = \alpha + 1$$