Th. Kalmes/J. Müller/T. Pohlen

SS 2005
29.06.2005

9. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Gruppenübungen

G17: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) eine unabhängige Folge identisch verteilter Zufallsvariablen $X_n \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \to EX_1 \qquad P\text{-fast sicher}\,.$$

G18: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es sei $(\mathcal{S}_n)$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}$ sowie $X_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{S}_n, P)$. Zeigen Sie: (X_n) ist genau dann ein Martingal bezüglich $(\mathcal{S}_n)$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A \in \mathcal{S}_n$ gilt

$$\int_A X_n \, dP \;=\; \int_A X_{n+1} \, dP\,.$$

Hausübungen

H25: Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist $Z \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(Z \geq k) \leq EZ \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(Z \geq k),.$$

H26: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) eine unabhängige Folge identisch verteilter Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Existiert eine Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \to Y \qquad P-\text{fast sicher}\,,$$

so existiert EX_1 und es gilt $Y = EX_1$ P-fast sicher.

H27: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) eine Folge in $\mathcal{L}_1(P)$. Zeigen Sie: (X_n) ist genau dann ein Martingal bezüglich $(\sigma(X_1, \ldots, X_n))_n$, wenn für $P^{(X_1,\ldots,X_n)}$-fast alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$E(X_{n+1} | (X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)) = x_n\,.$$