Th. Kalmes /J. Müller SS 2005
22.06.2005

8. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Gruppenübungen

G15: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ und $T(x) := x + c$ $(x \in \mathbb{R})$ für ein festes $c > 0$. Ist T maßerhaltend? Ist T ergodisch?

G16: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es sei $T : (\Omega, \mathcal{S}) \to (\Omega, \mathcal{S})$ messbar. Wir setzen $T^{-n}(A) := (T^n)^{-1}(A)$ für $A \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Ist A T-invariant, so ist $T^{-n}(A) = A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Ist T maßerhaltend und gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(A \cap T^{-n}(B)) = P(A)\ P(B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{S}$ (in diesem Fall heißt T „mixend“), so ist T ergodisch.

Hausübungen

H22: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in \mathcal{L}_2(P)$ mit $\operatorname{Var}(Y) > 0$.

a) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{Var}(X - aY) = \operatorname{Var}(X) - 2a \operatorname{Kov}(X, Y) + a^2 \operatorname{Var}(Y)\,.$$

b) (i) Für welches $a \in \mathbb{R}$ wird $\operatorname{Var}(X - aY)$ minimal?
(ii) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ wird $\| X - (aY + b) \|_2$ minimal?

H23: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P) = (S, \mathcal{B}_2 \cap S, m)$ und $T : S \to S$ definiert durch $T(z) := z^2$ $(z \in S)$ (vgl. B.11.12.3). Zeigen Sie, dass T ergodisch ist.

H24: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $T : (\Omega, \mathcal{S}) \to (\Omega, \mathcal{S})$ maßerhaltend. Gilt dann stets

(i) $T(A) \in \mathcal{S}$ für alle $A \in \mathcal{S}$?

(ii) $\mu(T(A)) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$ mit $T(A) \in \mathcal{S}$?