Th. Kalmes /J. Müller SS 2005
15.06.2005

# 7. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

## Gruppenübungen

G13: Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass in der Situation von D. 11.1 im Falle $0 \leq X < \infty$ durchaus $E(X|\mathcal{G}) \equiv \infty$ auftreten kann.

G14: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ eine $\sigma$-Algebra. Leiten Sie folgende Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten aus Eigenschaften der bedingten Erwartungen ab:

(i) $P(\emptyset|\mathcal{G}) = 0$ und $P(\Omega|\mathcal{G}) = 1$ $P_{|\mathcal{G}}$-fast sicher.
(ii) Für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ mit $A_1 \subset A_2$ ist $0 \leq P(A_1|\mathcal{G}) \leq P(A_2|\mathcal{G}) \leq 1$ $P_{|\mathcal{G}}$-fast sicher.
(iii) Sind $A_n \in \mathcal{S}$ paarweise diskunkt, so gilt

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{G}) \quad P_{|\mathcal{G}}\text{-fast sicher.}$$

Folgt aus diesen Eigenschaften, dass $A \mapsto P(A|\mathcal{G})(\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist?

## Hausübungen

H19: Zeigen Sie: Für $\mu \in \mathbb{R}^m, \Sigma \in \mathbb{R}_+^{m\times m}$ mit $\det(\Sigma) \neq 0$ ist $N(\mu, \Sigma^2)$ $\lambda^m$-stetig mit $\lambda^m$-Dichte

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \, \frac{1}{\det\Sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\Sigma^{-1}(x-\mu)\right|^2\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^m)\,.$$

H20: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S}) \cup \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Ferner seien $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{S}$ $\sigma$-Algebren. Zeigen Sie:

(i) $E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)\,,$
(ii) $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1)\,.$

H21: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ eine $\sigma$-Algebra. Eine Menge $B \in \mathcal{G}$ mit $P(B) > 0$ heißt $(P-)$*Atom* von $\mathcal{G}$, falls $P(C) = 0$ oder $P(C) = P(B)$ für alle $C \in \mathcal{G}, C \subset B$. Zeigen Sie:

a) Ist $Z \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{G})$, so ist $Z$ $P_{|\mathcal{G}}$-fast sicher konstant auf $B$.

b) Für alle $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{S}, P) \cup \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$ gilt $P_{|\mathcal{G}}$-fast sicher

$$E(X|\mathcal{G}) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP \qquad \text{auf } B\,.$$

c) Für alle $A \in \mathcal{S}$ ist $P_{|\mathcal{G}}$-fast sicher

$$P(A|\mathcal{G}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{auf } B.$$