Th. Kalmes /J. Müller/ T. Pohlen SS 2005
08.06.2005

6. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Gruppenübungen

G11: Es seien X_j ($j \in \mathbb{N}$) unabhängig und Cauchy-verteilt mit Parameter 1. Was ist die Verteilung von $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$?

G12: Der Fehler bei Rundung ab der zweiten Nachkommastelle sei $U_{(-0{,}05,0{,}05]}$-verteilt. Wie groß ist (etwa) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler in der Summe von 1000 Zahlen ≤ 2 ist?

Hausübungen

H16: Es seien $X_{n,j} \in \mathcal{L}_2(P)$ mit $EX_{n,j} = 0$ ($n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, k_n$) und $v_n := \sum_{j=1}^{k_n} E(X_{n,j}^2)$. Überlegen Sie sich, dass folgende **Liapunov-Bedingung**, d.h. es existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$\frac{1}{v_n^{1+\delta/2}} \sum_{j=1}^{k_n} E(|X_{n,j}|^{2+\delta}) \to 0 \qquad (n \to \infty)\,,$$

die Lindeberg-Bedingung impliziert. Machen Sie sich auch klar, dass die Liapunov-Bedingung insbesondere dann erfüllt ist, wenn $v_n \to \infty$ und $\sup_{n,j} N_\infty(X_{n,j}) < \infty$ gilt.

H17: a) Es sei $f \in C^k(-a, a)$ für ein $a > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$f(x) = T_k(x) + o(x^k) \qquad \text{für } x \to 0\,,$$

wobei $T_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\, x^\nu$.

b) Beweisen Sie den klassischen zentralen Grenzwertsatz ohne „Lindeberg“.

H18: Es seien X_1, X_2, X_3 unabhängig und $U_{[-1,1]}$-verteilt. Berechnen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ und, wenn Sie noch Lust haben, die von $X_1 + X_2 + X_3$.