Th. Kalmes /J. Müller

SS 2005
01.06.2005

5. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Gruppenübungen

G9: a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung C_α mit Parameter $\alpha > 0$.

b) Zeigen Sie: Für $\alpha, \beta > 0$ gilt $C_\alpha * C_\beta = C_{\alpha+\beta}$.

c) Geben Sie ein Beispiel zweier Zufallsvariablen X, Y, für die $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$ gilt, die aber nicht unabhängig sind.

G10: Es sei (X_n) eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen mit $EX_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie: (X_n) genügt genau dann dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t/n) \to 1 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Hausübungen

H13: a) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N},\ \tau > 0$ die charakteristische Funktion von $\Gamma_{n,\tau}$.

b) Zeigen Sie (unter Verwendung charakteristischer Funktionen): Sind $X_1, \ldots, X_n \sim \operatorname{Exp}(\tau)$ unabhängig, so gilt $\sum\limits_{j=1}^{n} X_j \sim \Gamma_{n,\tau}$.

H14: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathcal{L}_2(P)$. Zeigen Sie:

a) Gilt $\varphi_X(t) \equiv 1$ auf $(-a, a)$ für ein $a > 0$, so ist $X \sim \delta_0$.

b) Sind X, Y unabhängig und haben Y und $X + Y$ die gleiche Verteilung, so ist $X \sim \delta_0$.

H15: Es seien $\varphi, \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ Fourier-Transformierte endlicher Maße auf $\mathcal{B}_m$. Zeigen Sie, dass dann auch $\varphi + \psi$, $\overline{\varphi}$, $\operatorname{Re}\varphi$ Fourier-Transformierte sind. Gilt dies auch stets für $\varphi - \psi$ bzw. $\operatorname{Im}\varphi$?