Th. Kalmes /J. Müller

SS 2005
25.05.2005

# 4. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

## Gruppenübungen

G7: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ Zufallsvariable mit $X_n \to X$ $P$-fast sicher. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ Borel-messbar und $P^X$-fast sicher stetig, so gilt auch $f \circ X_n \to f \circ X$ $P$-fast sicher.

G8: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $b \in \mathbb{R}^m$, und es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Zeigen Sie:

$$\varphi_{AX+b}(s) = e^{i\,s^T b} \cdot \varphi_X(A^T s) \qquad (s \in \mathbb{R}^m)\,,$$

wobei $A^T$ die Transponierte von $A$ bezeichnet.

## Hausübungen

H10: a) Es seien $Q, Q_n$ Verteilungen auf $\mathcal{B}$ mit $Q_n \xrightarrow{w} Q$. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar, beschränkt und $Q$-fast sicher stetig, so gilt

$$\int f\, dQ_n \to \int f\, dQ \qquad (n \to \infty)\,.$$

b) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und beschränkt, und ist $f \cdot 1_{[0,1]}$ Lebesgue-fast überall stetig, so gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\Big(\frac{j}{n}\Big) \;\to\; \int\limits_{[0,1]} f d\lambda \qquad (n \to \infty)\,.$$

H11: a) Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien $\mu_k$ Maße auf $(\Omega, \mathcal{S})$. Wir definieren $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu_k$ durch

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k\Big)(A) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(A) \qquad (A \in \mathcal{S})\,.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S})$ mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int |f| d\mu_k < \infty$, so ist $f \in \mathcal{L}_1(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu_k)$, und es gilt

$$\int f\, d\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k\Big) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int f\, d\mu_k\,.$$

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda$.

H12: Es seien $(\Theta_j, \mathcal{T}_j, \mu_j)$ $\sigma$-endliche Maßräume und $h_j \in \mathcal{M}^+(\Theta_j, \mathcal{T}_j)$ mit $h_j < \infty$ für $j = 1, 2$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $h_1 \otimes h_2 : \Theta_1 \times \Theta_2 \to [0, \infty)$ mit $(h_1 \otimes h_2)(\vartheta_1, \vartheta_2) := h_1(\vartheta_1) h_2(\vartheta_2)$ ist $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-Dichte von $(h_1 \cdot \mu_1) \otimes (h_2 \cdot \mu_2)$.

b) Ist $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sind $X_j : \Omega \to \Theta_j$ Zufallsvariable mit $X_j \sim h_j \cdot \mu_j$ $(j = 1, 2)$, so sind $X_1, X_2$ genau dann unabhängig, wenn gilt

$$(X_1, X_2) \sim (h_1 \otimes h_2) \cdot (\mu_1 \otimes \mu_2)\,.$$