Th. Kalmes /J. Müller

SS 2005
11.05.2005

3. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G5: Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sind $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ Zufallsvariable mit $X_n \xrightarrow{w} X$, wobei X P-fast sicher mit einer Konstante übereinstimmt, so gilt $X_n \xrightarrow{P-\text{st}} X$.

Hinweis: Verwenden Sie H4.

G6: Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f \in C_b(\mathbb{R})$, die nicht gleichmäßig stetig ist.

Hausübungen

H7: Zeigen Sie:

a) Ist $f \in C_b(\mathbb{R})$ monoton, so ist f gleichmäßig stetig.

b) Jede stetige Verteilungsfunktion ist gleichmäßig stetig.

H8: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, und es seien Q, Q_n μ-stetige Verteilungen auf $\mathcal{S}$ mit μ-Dichten h, h_n. Zeigen Sie: Gilt $h_n \to h$ μ-fast überall, so folgt $Q_n(A) \to Q(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

H9: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ unabhängig mit $X_n \sim \operatorname{Exp}(\tau)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner seien $Y_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $Z_n := Y_n - \frac{\log n}{\tau}$ (vgl. H38, WT I).

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_n von P^{Z_n}.

b) Zeigen Sie: $P^{Z_n} \xrightarrow{w} Q$, und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Q.