Th. Kalmes /J. Müller SS 2005

04.05.2005

2. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G3: Finden Sie einen Wahrscheinlicheitsraum $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ und eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, die zwar P-stochastisch, aber weder P-fast sicher noch in $\mathcal{L}_1$ konvergiert.

G2: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_1(P)$ gleichgradig integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{X \in \mathcal{F}} E|X| < \infty .$$

Hausübungen

H4: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Wir definieren

$$d(X, Y) := \int \min(1, |X - Y|) \, dP \qquad (X, Y \in \mathcal{M}) .$$

Zeigen Sie:

a) d ist eine Halbmetrik auf $\mathcal{M}$ mit $d(X, Y) = 0$ genau dann, wenn $X = Y$ P-fast sicher.

b) Für $X, X_n \in \mathcal{M}$ gilt $d(X_n, X) \to 0$ genau dann, wenn $X_n \to X$ P-stochastisch.

H5: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_1(P)$.

a) Zeigen Sie: Gilt für ein $\delta > 0$

$$\sup_{X \in \mathcal{F}} E(|X|^{1+\delta}) < \infty ,$$

so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig integrierbar.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Menge $\mathcal{F}$ mit $\sup_{X \in \mathcal{F}} E|X| < \infty$, die nicht gleichgradig integrierbar ist.

H6: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie

a) Gilt $X_n \to X$ P-stochastisch und ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stetig, so gilt auch

$$f \circ X_n \to f \circ X$$

P-stochastisch.

b) Ist $X_n = (X_{1,n}, \dots, X_{m,n})$ mit $X_{j,n} : \Omega \to \mathbb{R}$, so gilt $X_n \to X$ P-stochastisch genau dann, wenn $X_{j,n} \to X_j$ P-stochastisch für alle $j = 1, \dots, m$.