Th. Kalmes /J. Müller

SS 2005
13.07.2005

11. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Gruppenübungen

G21: Es seien $(\Omega, \mathcal{S})$ ein Messraum und $(\mathcal{S}_j)$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{S}$. Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{S}_j)$, falls $\{\tau \leq j\} \in \mathcal{S}_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen

$$\mathcal{S}_\tau := \{A \in \mathcal{S} : A \cap \{\tau \leq j\} \in \mathcal{S}_j\} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{S}_\tau$ ist eine σ-Algebra.

(ii) Ist σ eine Stoppzeit mit $\sigma \leq \tau$, so gilt $\mathcal{S}_\sigma \subset \mathcal{S}_\tau$.

G22: Es seien $I \neq \emptyset$ eine Menge und ζ das Zählmaß auf I. Zeigen Sie: Ist $f : I \to [0, \infty)$ mit $\int f d\zeta < \infty$, so ist $\{\iota \in I : f(\iota) \geq \delta\}$ für alle $\delta > 0$ endlich und $\{\iota \in I : f(\iota) > 0\}$ abzählbar.

Hausübungen

H31: Es seien $(\Omega, \mathcal{S})$ ein Messraum, $(\mathcal{S}_j)$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{S}$ und X_j $(\mathcal{S}_j, \mathcal{B})$-messbar $(j \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

a) Ist $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ eine (endliche) Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{S}_j)$, so ist $X_\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega) \ \ (\omega \in \Omega)$ eine $(\mathcal{S}_\tau, \mathcal{B})$-messbare Abbildung.

b) Ist $B \in \mathcal{B}$, so ist durch

$$\tau_B(\omega) := \min\{j \in \mathbb{N} : X_j(\omega) \in B\} \qquad (\omega \in \Omega)$$

eine Stoppzeit gegeben.

H32: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, (X_n) ein Martingal und τ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{S}_n)$. Zeigen Sie: Ist $\tau_n := \min(n, \tau)$, so ist (X_{τ_n}) ein Martingal bzgl. $(\mathcal{S}_n)$.

H33: Es seien $I \neq \emptyset$ eine Menge und ζ das Zählmaß auf I. Für $f = (a_\iota)_{\iota \in I} : I \to [0, \infty)$ sei $\sum\limits_{\iota \in I} a_\iota := \int f \, d\zeta < \infty$. Zeigen Sie: Ist $0 < \delta_n \downarrow 0$, so gilt

$$\sum_{\iota \in I} a_\iota = \lim_{n \to \infty} \sum_{\iota \in I:\, a_\iota \geq \delta_n} a_\iota = \sup_{J \subset I \text{ endlich}} \sum_{\iota \in J} a_\iota \,.$$