Th. Kalmes /J. Müller SS 2005
06.07.2005

10. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Gruppenübungen

G19: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{S}_n)$. Zeigen Sie: Mit $X_0 := X_1, \mathcal{S}_0 := \mathcal{S}_1$ und

$$Z_n := \sum_{j=1}^{n} E(X_j - X_{j-1}|\mathcal{S}_{j-1}), \qquad Y_n := X_n - Z_n$$

gilt: (Y_n) ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{S}_n)$, und es ist $0 = Z_1 \leq Z_2 \leq Z_3 \ldots$ P-fast sicher.

G20: (Pólyasches Urnenmodell, Teil 1)
Eine Urne enthält weiße und schwarze Kugeln. Eine Kugel wird „zufällig“ gezogen und anschließend durch zwei Kugeln derselben Farbe ersetzt. Enthält also die Urne c weiße und $r - c$ schwarze Kugeln und wird etwa eine weiße gezogen, so ist der Anteil der weißen Kugeln nach dem Ersetzen $(c + 1)/(r + 1)$.
Versuchen Sie, die Veränderung des Anteils der weißen Kugeln durch einen Markov-Kern zu modellieren.

Hausübungen

H28: Es sei (X_n) eine unabhängige Folge $N(0, 1)$-verteilter Zufallsvariablen. Ferner sei $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ und $Y_n := e^{S_n - n/2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass (Y_n) ein Martingal bzgl. $(\sigma(X_1, \ldots, X_n))_n$ ist.
Hinweis: Es gilt $\int e^x \, dN(0, 1)(x) = e^{1/2}$

H29: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{S}, P) \cup \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$ und $Y : (\Omega, \mathcal{S}) \to (\Theta, \mathcal{T})$ messbar. Zeigen Sie: Für P^Y-fast alle $y \in \Theta$ gilt

$$E(X|Y = y) = \int x \; P^{X|Y}(y, dx) \, .$$

(Die Existenz von $P^{Y|X}$ wird vorausgesetzt.)

H30: (Pólyasches Urnenmodell, Teil 2)
Man stelle sich vor, dass der in G20 beschriebene Prozess „beliebig oft“ wiederholt wird. Zeigen Sie: Beschreibt X_n den Anteil der weißen Kugeln vor dem n-ten Ziehen, so ist durch (X_n) ein Martingal gegeben.