

## 1. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

### Gruppenübungen

G1: Es seien  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine unabhängige Folge von  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}$ . Zeigen Sie: Ist  $X : (\Omega, \mathcal{T}_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar, so existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $P(X = c) = 1$ .

G2: Es seien  $\zeta$  das Zählmaß auf  $\text{Pot}(\mathbb{Z})$  und

$$h_\lambda(k) := \begin{cases} e^{-\lambda} \lambda^k / k!, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

die Zähldichte der Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda > 0$ .

- a) Bestimmen Sie für  $\lambda, \mu > 0$  die Zähldichte von  $(h_\lambda \cdot \zeta) * (h_\mu \cdot \zeta)$ .
- b) Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ . Was ist die Verteilung von  $\sum_{j=1}^n X_j$  ?

### Hausübungen

H1: Finden Sie zwei Zufallsvariablen  $X, Y \in \mathcal{L}_2(P)$ , wobei  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  ein geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum ist, die zwar unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

H2: Es sei  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es sei  $(A_n)$  eine Folge in  $\mathcal{S}$ . Zeigen Sie:

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n).$$

H3: a) Für  $f, g \in \mathcal{L}_1(\lambda^m)$  sei  $\varphi : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\varphi(x, y) = f(x - y)g(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^m).$$

Zeigen Sie:

- (i)  $\varphi$  ist  $\lambda^{2m}$ -integrierbar mit  $\int |\varphi| d\lambda^{2m} = \int |f| d\lambda^m \cdot \int |g| d\lambda^m$ .
- (ii) Es existiert eine  $\lambda^m$ -Nullmenge  $N$  so, dass

$$(f * g)(x) := \int f(x - y)g(y) d\lambda^m(y)$$

für alle  $x \in N^c$  definiert ist, und es gilt  $\int |f * g| d\lambda^m \leq \int |f| d\lambda^m \cdot \int |g| d\lambda^m$  im Sinne von (7.4).

- b) Geben Sie ein Beispiel zweier Funktionen  $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  mit  $\int f d\lambda = \int g d\lambda = 1$  und  $(f * g)(0) = \infty$ .