J. Müller / M. Reinhard

WS 2004/2005
12.01.2005

9. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G17: Beweisen Sie die folgenden „Kettenregeln" für Bildmaße bzw. Maße mit Dichten.

a) Es seien $(\Omega_j, \mathcal{S}_j)$ Messräume $(j = 1, 2, 3)$, und es seien $T_j : (\Omega_j, \mathcal{S}_j) \to (\Omega_{j+1}, \mathcal{S}_{j+1})$ messbar $(j = 1, 2)$. Ist μ ein Maß auf $\mathcal{S}_1$, so gilt

$$\mu^{T_2 \circ T_1} = (\mu^{T_1})^{T_2} .$$

b) Ist $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und sind $g, h \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$, so ist

$$(g\, h) \cdot \mu = g \cdot (h \cdot \mu) .$$

G18: Für $p \in [1, \infty]$ sei $\ell_p := \mathcal{L}_p(\mathbb{N}, \mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \zeta)$. Überlegen Sie sich: Für $1 \le p < p' \le \infty$ gilt

$$\ell_p \subset \ell_{p'} .$$

Hausübungen

H25: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Berechnen Sie $N_p(f)$ $(1 \le p \le \infty)$ für

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} 1_{(0,1)}(x)$, (ii) $f(x) = x \cdot 1_{\mathbb{Z}}(x)$, (iii) $f(x) = e^{-x}\, 1_{[0,\infty)}(x)$.

H26: Geben Sie ein Beispiel einer Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in \mathcal{L}_p(U_{[0,1]})$,

$$N_p(f_n) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

für alle $p \in [1, \infty)$ und so, dass $(f_n(x))_n$ für alle $x \in [0, 1]$ divergiert.

H27: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \le p < p' \le \infty$. Zeigen Sie:

(i) $N_p(f) \le \mu(\Omega)^{1/p - 1/p'} \cdot N_{p'}(f) \quad (f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{S}))$.

(ii) Ist μ endlich, so ist $\mathcal{L}_{p'}(\mu) \subset \mathcal{L}_p(\mu)$.