J. Müller / M. Reinhard WS 2004/2005
08.12.2004

6. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G11: Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(x) - F(x^-) = P_F(\{x\})\,.$$

G12: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum, und es sei $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$ eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie $\int X^2 dP$.

Hausübungen

H16: Es sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}\,.$$

a) Zeigen Sie: Durch

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ist eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Quantilfunktion F^-.

H17: (Lotto „n aus N“)
Es seien $N, n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$. Durch

$$f(j) := \frac{\binom{n}{j}\binom{N-n}{n-j}}{\binom{N}{n}} \qquad (j = 0, \ldots, n)$$

ist die Zähldichte einer Verteilung auf $\{0, \ldots, n\}$ gegeben, der sogenannten hypergeometrischen Verteilung $H(N, n)$ mit Parametern N und n (der Wert $f(j)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit für j Richtige bei „n aus N“; vgl. B. 1.6 und G1). Berechnen Sie $\int X dP$ für eine $H(N, n)$-verteilte Zufallsvariable $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$, wobei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein beliebiger W-Raum ist.

H18: Zeigen Sie: Mit den Bezeichnungen aus S. 5.4 gilt:

(i) Existiert eine Folge (E_n) in $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$, so ist $\mathcal{S}_* = \sigma_*(\mathcal{E})$.

(ii) Existiert eine Folge $(\tilde{E}_n)$ in $\mathcal{E}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tilde{E}_n = \emptyset$, so ist

$$\mathcal{S}_* = \sigma_*(\{E \cup \{*\} : E \in \mathcal{E}\})\,.$$