J. Müller / M. Reinhard

WS 2004/2005
24.11.2004

4. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G7: Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und für $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie: μ^* ist ein äußeres Maß auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$.

b) Bestimmen Sie $\mathcal{S}(\mu^*)$.

G8: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \zeta)$ und $\mathcal{E} := \{\{k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, n \in \mathbb{N}\}$.
Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{E}$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$.

(ii) $\zeta_{|\mathcal{E}} = 2\zeta_{|\mathcal{E}}$ und ζ ist σ-endlich auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$,

(iii) $\zeta \neq 2\zeta$.

Wie verträgt sich dies mit S. 3.12?

Hausübungen

H10: Zeigen Sie: Für alle $A \subset \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{aligned} \mu^*_{\mathrm{vol}}(A) &= \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_n) : I_n \in \mathcal{E}_m (n \in \mathbb{N}), A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n^0\Big\} \\ &= \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_n) : I_n \in \mathcal{E}_m (n \in \mathbb{N}), A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{I_n}\Big\}. \end{aligned}$$

H11: Finden Sie

a) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene und dichte Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda^1(U) \leq \varepsilon$,

b) eine dichte G_δ-Menge $S \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda^1(S) = 0$.

H12: Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathrm{Pot}(X)$. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S}(\mu^*)$, so ist μ^* metrisch.