J. Müller / M. Reinhard

WS 2004/2005
09.02.2005

12. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G23: Es seien $(\Theta, \mathcal{T})$ und $(\Omega, \mathcal{S})$ Messräume und μ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{S}$. Zeigen Sie: Ist $k \in \mathcal{M}^+(\Theta \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S})$, so ist durch

$$K(\vartheta, B) := \int\limits_B k(\vartheta, \cdot) d\mu \qquad (\vartheta \in \Theta, B \in \mathcal{S})$$

ein Kern von $(\Theta, \mathcal{T})$ nach $(\Omega, \mathcal{S})$ definiert.

G24: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := (x + y)^2 \; 1_{[0,1]^2}(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^2)\,,$$

und es sei $K(x, \cdot) = \delta_x$ das Dirac-Maß an der Stelle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\int f \, d(\lambda \otimes K)$.

Hausübungen

H34: (noch ein Beweis zu $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$)
Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Fubini:

$$\frac{\pi}{4} = \int\limits_{[0,\infty)^2} y \, e^{-(1+x^2)y^2} d\,\lambda^2(x, y) = \Big(\int\limits_0^\infty e^{-y^2} dy \Big)^2 .$$

H35: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, 1_{(0,1)^2}(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^2)\,.$$

Berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int \int f(x, y) d\lambda(y) d\lambda(x) \quad \text{und} \quad \int \int f(x, y) d\lambda(x) d\lambda(y)\,.$$

Ist $f \in \mathcal{L}_1(\lambda^2)$?

H36:

a) Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein W-Raum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.
Zeigen Sie: Ist F die Verteilungsfunktion von P^X, so gilt

$$E(X^+) = \int\limits_{[0,\infty)} (1 - F(y^-)) d\lambda(y) = \int\limits_{[0,\infty)} (1 - F(y)) d\lambda(y)\,.$$

b) Verwenden Sie a), um (noch einmal) den Erwartungswert einer Exp(τ)-verteilten Zufallsvariable zu berechnen.