J. Müller / M. Reinhard WS 2004/2005
26.01.2005

11. Übung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Gruppenübungen

G21: Es seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{S}$.

a) Zeigen Sie: 1_A und 1_B sind genau dann unkorreliert, wenn gilt
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\,.$$

b) Was ist die Verteilung von 1_A?

G22: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Zeigen Sie: Ist $X \in \mathcal{L}_2(P)$, so gilt für alle $\varepsilon > 0$
$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \;\leq\; \mathrm{Var}(X)/\varepsilon^2\,.$$

b) (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)
Es sei (X_n) eine Folge paarweise unkorrelierter Zufallsvariable $X_n \in \mathcal{L}_2(P)$. Zeigen Sie: Gilt $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j) \to 0$ $(n \to \infty)$, so folgt für alle $\varepsilon > 0$
$$P\Big(\Big|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - EX_j)\Big| \geq \varepsilon\Big) \;\to\; 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Hausübungen

H31: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, und es seien $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$ sowie $F \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie: Ist μ σ-endlich und gilt $\int\limits_A f\,d\mu = \infty$ für alle $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) > 0$ und $A \subset F$, so gilt $\mu(F \cap \{f < \infty\}) = 0$.

H32: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, und es seien $h, \tilde{h} \in \mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{S})$ mit $h \cdot \mu = \tilde{h} \cdot \mu$. Zeigen Sie: Ist μ σ-endlich, so ist $h = \tilde{h}$ μ-f.ü.

H33: Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, P) = ([0,1], B \cap [0,1], U_{[0,1]})$, und es seien
$$A_n := \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Big[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\Big)\,, \quad X_n := 1_{A_n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Zeigen Sie:

(i) $P(A_n) = 1/2 \quad (n \in \mathbb{N})$,

(ii) die Folge (X_n) ist paarweise unkorreliert,

(iii) die Folge (X_n) genügt dem starken Gesetz der großen Zahlen.