

6. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis I

Gruppenübungen

G13: Berechnen Sie $\inf M$ und $\sup M$ für

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{1+n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

G14: Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (i) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{c^2} = c$.
- (ii) Für alle $c \geq 0$ gilt $(\sqrt{c})^2 = c$.
- (iii) Für alle $c, d \geq 0$ gilt $\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c} \sqrt[n]{d}$.
- (iv) Für alle $c, d \in \mathbb{R}$ mit $cd \geq 0$ gilt $\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c} \sqrt[n]{d}$.

G15: Weisen Sie nach, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z = (x, y)$ gilt

$$z \cdot z^{-1} = (1, 0),$$

wobei $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$.

Hausübungen

H15: Bestimmen Sie $\inf M$ und $\sup M$ für

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{t}{1+t} \text{ für ein } t \in [0, \infty) \right\}$$

H16: Beweisen Sie: Für alle $x, y > 0$ gilt

- (i) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$,
- (ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$.

Hinweis zu (ii): Überlegen Sie sich zunächst, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b \geq 0$ gilt

$$a^3 + b^3 - ab^2 - ba^2 \geq 0.$$