

## 5. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis I

### Gruppenübungen

G10: Es sei  $K$  ein geordneter Körper, und es seien  $x, y \in K$ . Zeigen Sie: Es gilt

$$\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|.$$

G11: Es sei  $K$  ein geordneter Körper, und es sei  $M \subset K$  nach oben beschränkt. Dann heißt  $\bar{\eta} \in K$  *Maximum* von  $M$  (kurz  $\bar{\eta} =: \max M$ ), falls  $\bar{\eta} \in M$  und  $\bar{\eta} = \sup M$  gilt. Geben Sie nach oben beschränkte Mengen  $M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{Q}$  an mit

- (i)  $M_1$  hat ein Maximum,
- (ii)  $M_2$  hat ein Supremum, aber kein Maximum.

G12: Es sei  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 > 2$ . Zeigen Sie: Für

$$y := x - \frac{x^2 - 2}{2x}$$

gilt auch  $y^2 > 2$ .

### Hausübungen

H12: Es sei  $K$  ein geordneter Körper, und es seien  $x, y \in K$ . Zeigen Sie: Es gilt

$$4xy \leq (x + y)^2.$$

Wann gilt dabei Gleichheit?

H13: (allgemeine Dreiecksungleichung)

Es sei  $K$  ein geordneter Körper. Zeigen Sie: Ist  $n \in \mathbb{N}$  und sind  $x_1, \dots, x_n \in K$ , so gilt

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

H14: a) Es sei  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $1 \leq x^2 < 2$ . Zeigen Sie, dass für

$$y := x + \frac{2 - x^2}{2x + 1}$$

auch  $1 \leq y^2 < 2$  gilt.

b) Beweisen Sie, dass  $M = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x^2 < 2\}$  kein Supremum hat.