

5. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis I

Gruppenübungen

G10: Es sei K ein geordneter Körper, und es seien $x, y \in K$. Zeigen Sie: Es gilt

$$\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|.$$

G11: Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $M \subset K$ nach oben beschränkt. Dann heißt $\bar{\eta} \in K$ *Maximum* von M (kurz $\bar{\eta} =: \max M$), falls $\bar{\eta} \in M$ und $\bar{\eta} = \sup M$ gilt. Geben Sie nach oben beschränkte Mengen $M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{Q}$ an mit

- (i) M_1 hat ein Maximum,
- (ii) M_2 hat ein Supremum, aber kein Maximum.

G12: Es sei $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 > 2$. Zeigen Sie: Für

$$y := x - \frac{x^2 - 2}{2x}$$

gilt auch $y^2 > 2$.

Hausübungen

H12: Es sei K ein geordneter Körper, und es seien $x, y \in K$. Zeigen Sie: Es gilt

$$4xy \leq (x + y)^2.$$

Wann gilt dabei Gleichheit?

H13: (allgemeine Dreiecksungleichung)

Es sei K ein geordneter Körper. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $x_1, \dots, x_n \in K$, so gilt

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

H14: a) Es sei $x \in \mathbb{Q}$ mit $1 \leq x^2 < 2$. Zeigen Sie, dass für

$$y := x + \frac{2 - x^2}{2x + 1}$$

auch $1 \leq y^2 < 2$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass $M = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x^2 < 2\}$ kein Supremum hat.