J. Müller

WS 2003/2004
11.02.2004

13. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis I

Gruppenübungen

G31: Überlegen Sie sich, dass das Cauchy-Produkt der beiden (bedingt) konvergenten Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu / \sqrt{\nu+1}$$

divergiert.

G32: Es sei $|z| < 1$. Bestimmen Sie die Reihenglieder der Cauchy-Produktreihe

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) z^\nu\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu\Big) .$$

Was ist der Reihenwert?

G33: Zeigen Sie: Das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen ist absolut konvergent.

Hausübungen

H33: a) (Quotientenkriterium)
Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_\nu \neq 0$ für fast alle ν. Zeigen Sie: Gilt

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| < 1 ,$$

so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent.

b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^{1000}\, 999^\nu}{1000^\nu} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu!}{\nu^\nu}$$

H34: Überlegen Sie sich, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^2}$ nicht absolut konvergiert.

H35: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Versuchen Sie, eine Potenzreihenentwicklung der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \qquad (|z| < 1)$$

herzuleiten.