12. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis I

Gruppenübungen

G28: Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n! \geq \left(\frac{n}{a}\right)^n$$

wobei $a := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$.

G29: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \, \frac{1}{\sqrt[p]{\nu}} \ , \ \text{wobei } p \in \mathbb{N} \text{ fest}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3^\nu}{(2 - 1/\nu)^{2\nu}} \ .$$

G30: Zeigen Sie: Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent, so ist auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2$ absolut konvergent. Gilt die entsprechende Aussage auch ohne „absolut“ ?

Hausübungen

H30: Zeigen Sie: Für alle $\nu \geq 4$ gilt $\sqrt[\nu]{\nu} \geq 1 + 1/\nu$ und $\sqrt[\nu+1]{\nu+1} \leq \sqrt[\nu]{\nu}$.

H31: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz

(i) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (\sqrt[\nu]{\nu} - 1)$,

(ii) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \binom{\nu}{2} / 2^\nu$.

H32: Zeigen Sie: Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent und ist $(b_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ beschränkt, so ist auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu$ absolut konvergent. Gilt die entsprechende Aussage auch ohne „absolut“ ?