J. Müller

WS 2003/2004
21.01.2004

10. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis I

Gruppenübungen

G23: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ so, dass gilt

$$a_{2k} \to a \qquad \text{und} \qquad a_{2k-1} \to b \qquad (k \to \infty)\,.$$

Zeigen Sie: Dann ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \max(a,b) \qquad \text{und} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \min(a,b)\,.$$

G24: Bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ für

$$a_n := \frac{n^2+1}{(-1)^n n^2 + 2n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

G25: Zeigen Sie: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1.$

Hausübungen

H24: („Division durch Multiplikation“)
Es sei $x > 0$ fest. Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_{n+1} := a_n(2 - x a_n) \qquad (n \in \mathbb{N})\,,$$

wobei $a_1 \in (0, 1/x)$ ein beliebiger Startpunkt ist. Zeigen Sie, dass (a_n) gegen $1/x$ konvergiert.

H25: Es sei

$$a_n := \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n\right)^{-1}.$

H26: Zeigen Sie, dass „nicht jede Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert“, d.h. geben Sie eine Folge in $\mathbb{Q}$ an, die die Cauchy-Bedingung aus D. 5.17 erfüllt, die aber keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ hat.