J. Müller WS 2005/2006

11.02.2006

Klausur zur Analysis I

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Zeigen Sie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+m}{\nu} = \binom{n+m+1}{n}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{9}{4}\, n^n \le (n+1)^n \quad ?$$

Aufgabe 3: (2+2+2 Punkte)
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^n}\right)^n$, (ii) $b_n = (-1)^n \dfrac{4^n}{2^n+1}$, (iii) $c_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Aufgabe 4: (4+2 Punkte)
Es sei $a_0 \in (0,2)$ und (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} := (1 - a_n)^2 + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

a) Zeigen Sie:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $1 \le a_n < 2$.

(ii) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 5: (2+2+3 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt[3]{\nu}}$, (ii) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt[\nu]{\nu}}$, (iii) $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \cdot \ln^2 \nu}$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Es sei (X,d) ein metrischer Raum, und es seien $f,g,h : M \to \mathbb{R}$, wobei $M \subset X$. Ferner gelte

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad (x \in M)\,.$$

Zeigen Sie: Ist $x_0 \in X$ so, dass

$$f(x) \to y_0 \qquad \text{und} \qquad h(x) \to y_0 \qquad (x \to x_0)\,,$$

so gilt auch

$$g(x) \to y_0 \qquad (x \to x_0)\,.$$

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0\,.$$

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x\,, & \text{falls } x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf Existenz von Grenzwerten und auf Stetigkeit.

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0 \\ \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

eine Unstetigkeitsstelle 2. Art an $x_0 = 0$ hat.
An welchen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ ist f stetig?

Aufgabe 10: (4+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \begin{cases} \sin(z)/z & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{C}$ ist.

b) Überlegen Sie sich, dass die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| = 1\}$ abgeschlossen ist.