

2. Übung zur Einführung in die reellen Zahlen

Abgabe: Montag, 28.11.2005, vor der Übung

H3: (Irrationalität des Goldenen Schnitts)

Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 = 1 - x$$

keine Lösung in \mathbb{Q} besitzt.Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass die Gleichung $x^2 = 5$ keine Lösung in \mathbb{Q} hat.H4: a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{Q}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b^n - a^n = (b - a) \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-1-\nu}.$$

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 5 Teiler von $8^n - 3^n$.H5: a) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ ist

$$4xy \leq (x + y)^2.$$

b) Es sei

$$M := \left\{ \frac{n \cdot m}{(n + m)^2} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Untersuchen Sie, ob $\sup M$ und $\inf M$ existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls. Existieren auch $\max M$ bzw. $\min M$?