J. Müller SS 2005

07.07.2005

# 4. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis III

Ü 15: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha} \qquad (x,y > 0).$$

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $f$.

b) Zeigen Sie

$$\operatorname{grad}\, f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x,y)\,.$$

Ü 16: Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und so, dass $tx \in U$ für alle $x \in U$ und $t > 0$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *homogem vom Grad* $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $x \in U$ und alle $t > 0$ gilt $f(tx) = t^{\alpha} f(x)$. Zeigen Sie: Ist $f$ homogen vom Grad $\alpha$ und differenzierbar auf $U$, so gilt

$$\operatorname{grad}\, f(x) \cdot x = \alpha\, f(x) \qquad (x \in U)\,.$$

**Hinweis:** Betrachten Sie die Funktion $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := t^{-\alpha} f(tx)$.

Ü 17 a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } y = x^2,\ x \neq 0 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Richtungsableitungen von $f$ an $(0,0)$ und zeigen Sie, dass $f$ unstetig an $(0,0)$ ist.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $f$ an allen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass $f$ unstetig an $(0,0)$ ist. ist $f$ homogen?

Ü 18: Berechnen Sie $J_f, J_g$ und $J_{g\circ f}$ für $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2+1) \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}\,.$$