J. Müller

SS 2005
16.06.2005

3. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis III

Ü 10: Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ mit Entwicklungsmitte $x_0 = 0$, indem Sie

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

beachten und $\frac{1}{1+t}$ als Potenzreihe mit Entwicklungsmitte $x_0 = 0$ schreiben.

Ü 11: Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \geq 0 \;\; (x \in [a,b])$. Zeigen Sie

a) Sind $f, g \in R[a,b]$, so gilt

$$\inf_{[a,b]} f(x) \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq \sup_{[a,b]} f(x) \cdot \int_a^b g\,.$$

b) Ist f darüber hinaus stetig auf $[a,b]$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g\,.$$

Ü 12: Für festes $\alpha > 0$ sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x^\alpha \, e^{-x} \qquad (x \geq 0)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Extremstellen von f.

b) Berechnen Sie die Taylor-Polynome T_0, T_1, T_2 mit Entwicklungsmitte $x_0 = 1$.

Ü 13: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen folgender Funktionen:

(i) $f_1(x,y) = e^x \cos y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$.

(ii) $f_2(x,y,z) = x^3 y^2 z^4 \qquad (x,y,z \in \mathbb{R})$.

(iii) $f_3(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^2 \qquad (x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R})$, wobei $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ fest,

(iv) $f_4(x,y) = x^y \qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})$.

Ü 14: Überlegen Sie sich, dass für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-i\ell t} dt = \begin{cases} 1\,, & k = \ell \\ 0\,, & k \neq \ell \end{cases} \,.$$