J. Müller SS 2005

2.06.2005

2. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis III

Ü 5: Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Existenz

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx\,, \qquad \text{(iii)} \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$$

Ü 6: Zeigen Sie: Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin(\pi x)|}{x}\,dx$ existiert nicht.

Ü 7: Beweisn Sie: Für alle $x > 0$ gilt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

Ü 8: Zeigen Sie unter Ausnutzung der Eulerschen Summenformel:
Ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$T_g\left(\frac{1}{n}\right) \to \int_0^1 g \qquad (n \to \infty)$$

(wobei T_g wie in Ü 3).

Ü 9: a) Beweisen Sie: Für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ gilt

$$k\int \cos^k x\,dx = \cos^{k-1} x \cdot \sin x + (k-1)\int \cos^{k-2} x\,dx$$

und

$$k\int \sin^k x\,dx = -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1)\int \sin^{k-2} x\,dx\,.$$

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_{2n} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

und

$$c_{2n+1} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\,.$$

c) Zeigen Sie: Für

$$w_n := \frac{2\cdot 3}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}\,.$$

(Hinweis: Es ist $w_n = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$.)