1. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis III

Ü 1: a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es sei $g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf I mit $g(x) > 0$ $(x \in I)$.
Zeigen Sie:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln(g(x)) \qquad \text{auf} \quad I\,.$$

b) Bestimmen Sie

(i) $\displaystyle\int \tan x\, dx\,,$ (ii) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\, dx\,,$ (iii) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^2 x}\, dx\,.$

Ü 2: Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

(i) $\displaystyle\int \cos(2x+3)dx\,,$ (ii) $\displaystyle\int x e^{-x^2}\, dx\,,$

(iii) $\displaystyle\int \arctan x\, dx\,,$ (iv) $\displaystyle\int \sin^n x \cos x\, dx$ $\quad(n \in \mathbb{N})\,.$

Ü 3: (Trapezregel)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, und für ein $n \in \mathbb{N}$ sei

$$h := \frac{b-a}{n}\,.$$

Ist $f \in R[a, b]$, so heißt

$$T_f(h) := h \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \Big\{ f(a + (j-1)h) + f(a + jh) \Big\}$$

Trapeznäherung an $\int_a^b f(x)dx$.

a) Können Sie sich vorstellen, warum $T_f(h)$ „Trapeznäherung“ heißt? (geometrische Interpretation)

b) Bestimmen Sie $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ näherungsweise, indem Sie $T_f(h)$ für $f(x) = \frac{1}{x}$ und verschiedene Werte von h berechnen.

Ü 4: Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$I_n(x) := \int_0^x t^n\, e^t\, dt\,.$$

a) Zeigen Sie:

$$I_n(x) = e^x\, x^n - n\, I_{n-1}(x) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

b) Berechnen Sie $I_n(1)$ für einige n.

c) Beweisen Sie, wenn Sie Lust haben, auch folgende explizite Darstellung von I_n:

$$I_n(x) = (-1)^n\, n! \left\{ e^x \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j\, x^j}{j!} \right) - 1 \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$