J. Müller

SS 2006
19.07.2006

Klausur zur Analysis II

Aufgabe 1: (2+3 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{1-\cos x}\,.$$

b) Zeigen Sie: Die Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{e^z-1}{z} & , \quad z\neq 0 \\ 1 & , \quad z=0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2: (4+2 Punkte)

a) Die Funktionen $f_n : [0,\pi]\to\mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f_n(x) := \sin^n x \qquad (x\in[0,\pi];\ n\in\mathbb{N})\,.$$

Untersuchen Sie (f_n) auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz.

b) Untersuchen Sie die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(\nu^2 x)}{\nu^3}$ auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^4}\,dx\,,$ (ii) $\displaystyle\int \arccos x\,dx\,.$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha}\, dx$ konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals.

Aufgabe 5: (2+2 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } 0 < y < x^2 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad .$$

Untersuchen Sie, für welche r die Richtungsableitung $\partial_r f(0,0)$ existiert, und berechnen Sie diese gegebenenfalls. Ist f stetig an $(0,0)$?

Aufgabe 6: (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Extremstellen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy \qquad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

Aufgabe 7: (2+3 Punkte)

a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex. Zeigen Sie: Ist $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\mathrm{grad} f(x) \equiv 0$ auf U, so ist $f(x) \equiv \mathrm{const}$ auf U.

b) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und konvex. Zeigen Sie: Ist $f : U \to \mathbb{R}$ (komplex) differenzierbar, so ist $f(z) \equiv \mathrm{const}$.