Jürgen Müller
Analysis I-IV

Skriptum zur Vorlesung
Wintersemester 2005/2006 bis Sommersemester 2007

Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Dank an Elke Gawronski und Judith Wahlen für die Mithilfe bei der Erstellung

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Abbildungen

Wir starten mit einigen einführenden Definitionen und Ergebnissen aus der Theorie der Mengen und Abbildungen, die nicht nur Grundlage der Analysis sondern der gesamten Mathematik sind.
Unsere Darstellung gründet auf den von G. Cantor geprägten (sog. naiven) Mengenbegriff.

> Eine *Menge* M ist eine "Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen".

Ein solches Objekt x heißt *Element* der Menge M (Schreibweise: $x \in M$; ist x nicht Element von M, so schreiben wir $x \notin M$). Es gibt prizipiell zwei Möglichkeiten der Darstellung von Mengen: die aufzählende Schreibweise (etwa $M = \{1, 3, 5, 7\}$) und die beschreibende Schreibweise. Die beschreibende Schreibweise hat allgemein die Form $M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$, wobei E irgendeine Eigenschaft ist (also im obigen Fall etwa $M = \{x : x \text{ ungerade natürliche Zahl kleiner als } 9\}$).

Definition 1.1 Es seien A, B Mengen.

1. A heißt *Teilmenge* von B, falls für jedes $x \in A$ auch $x \in B$ gilt. (Schreibweise: $A \subset B$).
2. A und B heißen *gleich* (Schreibweise $A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$.
3. Die Menge $B \setminus A := \{x : x \in B \,\text{und}\, x \notin A\}$ heißt *Differenz* von B und A. Ist $A \subset B$, so heißt $A^c := C_B(A) := B \setminus A$ *Komplement* von A (bzgl. B).
4. Die Menge ohne Elemente heißt *leere Menge* (Schreibweise: $\emptyset$).
5. Die Menge $A \cup B := \{x : x \in A \,\text{oder}\, x \in B\}$ heißt *Vereinigung* von A und B.
6. Die Menge $A \cap B := \{x : x \in A \,\text{und}\, x \in B\}$ heißt *Schnitt* von A und B.

Definition 1.2 Es seien A und B Mengen. Dann heißt

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\} ,$$

also die Menge der geordneten Paare von Elementen aus A und B, das *Produkt* oder die *Produktmenge* von A und B. (Ein geordnetes Paar ist formal definiert als $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$; insbesondere gilt also $(a, b) = (\tilde{a}, \tilde{b})$ genau dann, wenn $a = \tilde{a}$ und $b = \tilde{b}$ ist.)

Beispiel 1.3 Ist $A = \{1, 2\}$ und $B = \{3\}$, so ist

$$A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\} \text{ und } B \times A = \{(3, 1), (3, 2)\} .$$

Man beachte, dass $A \times B$ nicht mit $B \times A$ übereinstimmt.

Satz 1.4 *Es seien A_1, A_2, A_3 Mengen. Dann gilt*

1. $A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$,
   $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$.
2. $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$,
   $A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$.
   Wir schreiben deshalb auch kurz $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ und $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.
3. $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$,
   $A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$.

Beweis.
1. und 2. folgen sofort aus Definition 1.2. Wir beweisen die erste Aussage von 3.
"$\subset$": Es sei

$$x \in A_1 \cap (A_2 \cup A_3) .$$

Dann ist $x \in A_1$ und $x \in A_2 \cup A_3$.

1. Fall: $x \in A_1$ und $x \in A_2$. Dann ist $x \in A_1 \cap A_2$, also auch $x \in (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$.
2. Fall: $x \in A_1$ und $x \in A_3$. Dann ist $x \in A_1 \cap A_3$, also auch $x \in (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$.

Also ist in jedem Fall $x \in (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$.
Damit gilt $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \subset (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$.
"$\supset$": Umgekehrt sei $x \in (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$. Dann ist $x \in A_1 \cap A_2$ oder $x \in A_1 \cap A_3$. In beiden Fällen ist dann $x \in A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$. Also folgt $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \subset A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$.
Die zweite Aussage von 3. als [Ü]. □

Satz 1.5 (Regeln von de Morgan) *Es seien A_1, A_2 Mengen, und es sei B eine Menge mit $A_1 \subset B$ und $A_2 \subset B$. Dann gilt*

1. $C_B(A_1 \cup A_2) = C_B(A_1) \cap C_B(A_2)$.
2. $C_B(A_1 \cap A_2) = C_B(A_1) \cup C_B(A_2)$.

Beweis.
1. "$\subset$": Es sei $x \in C_B(A_1 \cup A_2)$. Dann ist $x \in B$ und $x \notin A_1 \cup A_2$, also $x \in B$ und $x \notin A_1$ sowie $x \notin A_2$. Damit ist $x \in C_B(A_1)$ und $x \in C_B(A_2)$, d. h. $x \in C_B(A_1) \cap C_B(A_2)$.
"$\supset$": Es sei $x \in C_B(A_1) \cap C_B(A_2)$. Dann ist $x \in C_B(A_1)$ und $x \in C_B(A_2)$. Also ist $x \in B$ und $x \notin A_1$ sowie $x \notin A_2$. Dann ist $x \in B$ und $x \notin A_1 \cup A_2$, also $x \in C_B(A_1 \cup A_2)$.

2. [Ü]. □

Definition 1.6 Es seien X und Y Mengen. Eine Teilmenge R von $X \times Y$ heißt *Relation* (zwischen X und Y). Ist speziell $X = Y$, so heißt R *Relation in* X. Eine Relation R zwischen X und Y heißt *Abbildung (von X nach Y)* bzw. *Funktion (von X nach Y)* falls gilt:

a) Für alle $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$.

und

b) Sind $(x, y) \in R$ und $(x, \tilde{y}) \in R$ so gilt $y = \tilde{y}$.

Bemerkung und Definition 1.7 Ist R eine Abbildung von X nach Y, so ist jedem Wert $x \in X$ genau ein Wert $f(x)$ mit $(x, f(x)) \in R$ zugeordnet. Wir identifizieren R dann auch mit dieser Zuordnungsvorschrift f und schreiben $f : X \to Y$ oder $x \mapsto f(x)$. Weiter heißen X der *Definitionsbereich*, Y der *Zielbereich* und

$$W(f) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in Y : \exists\, x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$$

der *Wertebereich (von f)*. Ferner setzen wir für $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

($f^{-1}(B)$ heißt *Urbild von B unter f*) und für $A \subset X$

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : \exists\, x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$$

($f(A)$ heißt *Bild von A unter f*).

Ist $f : X \to Y$ und ist $X_0 \subset X$, so heißt $f_{|X_0} : X_0 \to Y$, definiert durch $f_{|X_0}(x) := f(x)$ für alle $x \in X_0$, *Einschränkung* von f auf X_0.

Satz 1.8 *Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$. Dann gilt für $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$*

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

2. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,

4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Beweis.
1. "$\subset$": Es sei $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Dann existiert ein $x \in A_1 \cup A_2$ mit $f(x) = y$. Ist $x \in A_1$, so ist $y = f(x) \in f(A_1) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. Entsprechend ist $y \in f(A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ im Falle $x \in A_2$.
"$\supset$": Nach Definition gilt $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$ und $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ also $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

2. "$\subset$": Es sei $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Dann ist $f(x) \in B_1 \cup B_2$.
Ist $f(x) \in B_1$, so ist $x \in f^{-1}(B_1)$ also auch $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Entsprechend ist $x \in f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, falls $f(x) \in B_2$.
"$\supset$": Nach Definition gilt

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2) \text{ und } f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)\ ,$$

also $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

3. Es sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Dann existiert ein $x \in A_1 \cap A_2$ mit $f(x) = y$. Da $x \in A_1$ und $x \in A_2$ ist, folgt $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

4. [Ü] □

Beispiel 1.9 Es seien

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} = \{\text{natürliche Zahlen}\}$$

und

$$\mathbb{Z} := \{\text{ganze Zahlen}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}\ .$$

Weiter seien $X = Y = \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}\ .$$

Dann gilt $W(f) = \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Weiter ist etwa

$$f^{-1}(\{1, \ldots, n\}) = f^{-1}(\{1, \ldots, n\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}) = \{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}$$

und $f^{-1}(\{-1, -2, -3, \ldots\}) = \emptyset$ sowie $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} = f(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Ist $\tilde{f} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\tilde{f}(x) := x \qquad (x \in \mathbb{N}_0)\ ,$$

so ist zwar $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, aber $\tilde{f} \neq f$. Es gilt aber $f_{|\mathbb{N}_0} = \tilde{f}$.

Definition 1.10 Es seien X, Y Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

1. *surjektiv* (oder Abbildung von X *auf* Y), falls $W(f) = Y$ ist,
2. *injektiv* (oder *eineindeutige* Abbildung), falls für alle $y \in W(f)$ die Menge $f^{-1}(\{y\})$ einelementig ist (d. h. sind $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $x_1 = x_2$),
3. *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1.11 Es seien f und $\tilde{f}$ wie im B 1.9 Dann ist f weder surjektiv noch injektiv (es gilt $f^{-1}(\{(n\}) = \{n, -n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$); $\tilde{f}$ ist injektiv.

Definition 1.12 Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : X \to Z$, definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad (x \in X)$$

Verknüpfung von g und f (oder *Hintereinanderausführung von f und g*).

Satz 1.13 *Es seien X, Y, Z, U Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ und $h : Z \to U$ Abbildungen. Dann gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \ .$$

Beweis.
Es gilt $h \circ (g \circ f) : X \to U$ sowie $(h \circ g) \circ f : X \to U$ und für $x \in X$ ist

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x) \ .\end{aligned}$$

Definition 1.14 Es seien X, Y Mengen und es sei $f : X \to Y$ bijektiv. Wir definieren

$$f^{-1}(y) := x \qquad (y \in Y) \ ,$$

wobei $y = f(x)$. Die Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ heißt *Umkehrabbildung von f*. Es gilt dabei

$$f^{-1} \circ f : X \to X \ , (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad (x \in X) \ ,$$

d. h. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$, wobei $\mathrm{id}_X : X \to X$, definiert durch $\mathrm{id}_X(x) := x$ $(x \in X)$, die sog. identische Abbildung auf X bezeichnet. Genauso gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und außerdem ist auch $f^{-1} : Y \to X$ bijektiv.

Definition 1.15 Es sei $I \neq \emptyset$ eine Menge, und es seien A_α Mengen für alle $\alpha \in I$. (I nennt man dann "Indexmenge".) Dann heißt

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$$

Vereinigung der Mengen A_α (über $\alpha \in I$).
Weiter heißt

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I\}$$

Durchschnitt der Mengen A_α (über $\alpha \in I$).
Ist speziell I endlich, etwa $I = \{j_1, \ldots, j_n\}$ so schreiben wir auch

$$A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n} = \bigcup_{k=1}^{n} A_{j_k} := \bigcup_{j \in I} A_j$$

und

$$A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_n} = \bigcap_{k=1}^{n} A_{j_k} := \bigcap_{j \in I} A_j \ .$$

Beispiel 1.16 Es sei $\mathbb{P} = \{p : p \text{ Primzahl}\}$ und

$$A_p := \{kp : k \in \mathbb{N}\} \qquad (p \in \mathbb{P}) \ .$$

Dann ist

$$\bigcup_{p \in \mathbb{P}} A_p = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{kp : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

und

$$\bigcap_{p \in \mathbb{P}} A_p = \emptyset \ .$$

2 Körper und das Prinzip der vollständigen Induktion

Den geeigneten Rahmen für die Fragen der Differential- und Integralrechnung, denen wir uns später zuwenden wollen bilden die reellen Zahlen. Wir werden die reellen Zahlen als den (i. W. einzigen) "vollständigen geordneten Körper" kennenlernen.

Definition 2.1 Es sei K eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und es seien $+: K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ Abbildungen. Dann heißt $K = (K, +, \cdot)$ *Körper*, falls folgende Rechenaxiome gelten:

(K.1) Für alle $x, y \in K$ ist $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$
(Kommutativgesetze)

(K.2) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(Assoziativgesetze)

(K.3) Es existiert ein Element $0 = 0_K \in K$ mit $x + 0_K = x$ für alle $x \in K$
(Existenz einer Null)

(K.4) Es existiert ein Element $1 = 1_K \in K \setminus \{0\}$ mit $x \cdot 1_K = x$ für alle $x \in K \setminus \{0\}$
(Existenz einer Eins)

(K.5) Für alle $x \in K$ existiert ein Element $-x \in K$ mit $x + (-x) = 0$ und für alle $x \in K \setminus \{0\}$ existiert ein Element $x^{-1} \in K$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$
(Existenz von inversen Elementen)

(K.6) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
(Distributivgesetz)

Statt $x \cdot y$ schreiben wir im folgenden auch kurz xy. Außerdem schreiben wir kurz $x \cdot y + z$ statt $(x \cdot y) + z$ (Punktrechnung vor Strichrechnung). Schließlich schreiben wir kurz $x - y$ statt $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ (oder x/y) statt xy^{-1}.

Bemerkung 2.2 Wichtig für Axiom (K.5) ist, dass "die Null und die Eins eindeutig bestimmt sind", d. h. es existiert nur ein $0_K \in K$ mit $x + 0_K = x$ für alle $x \in X$ und nur ein $1_K \in K \setminus \{0_K\}$ mit $x \cdot 1_K = x$ für alle $x \in K \setminus \{0_K\}$.
(Denn: Es seien $0'_K$ und $0''_K \in K$ mit $x + 0'_K = x + 0''_K = x$ für alle $x \in K$.
Dann gilt

$$0''_K = 0''_K + 0'_K \overset{\text{(K.1)}}{=} 0'_K + 0''_K = 0'_K \,.$$

Entsprechendes gilt für 1_K)

Die Eindeutigkeit der inversen Elemente ist ein Spezialfall des folgenden Satzes

Satz 2.3 *Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und es sei $a \in K$.*

1. *Für jedes $b \in K$ hat die Gleichung*

$$a + x = b$$

   genau eine Lösung, nämlich $x = b - a$.

2. *Ist $a \neq 0$, so hat für jedes $b \in K$ die Gleichung*

$$a \cdot x = b$$

   genau eine Lösung, nämlich $x = b/a$.

   Außerdem gilt $0_K \cdot x = 0_K$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wir beweisen, nur Aussage 1. Der Beweis von 2. bleibt als [Ü].
Wir zeigen, dass $x = b - a$ die Gleichung löst: Es gilt

$$\begin{aligned} a + (b - a) &= a + (b + (-a)) \overset{(K.1)}{=} a + ((-a) + b) \overset{(K.2)}{=} (a + (-a)) + b \\ &\overset{(K.5)}{=} 0 + b \overset{(K.1)}{=} b + 0 \overset{(K.3)}{=} b\,. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Lösung eindeutig bestimmt ist: Ist $x' \in K$ mit $a + x' = b$, so gilt

$$\begin{aligned} x' &\overset{(K.3)}{=} x' + 0 \overset{(K.5)}{=} x' + (a + (-a)) \overset{(K.2)}{=} (x' + a) + (-a) \\ &\overset{(K.1)}{=} (a + x') + (-a) = b + (-a) = b - a\,. \end{aligned}$$

Also ist $x' = b - a$. □

Bemerkung 2.4 Wir stellen noch einige Rechenregeln zusammen, deren Beweis sich aus den Axiomen (K.1) bis (K.6) und S. 2.3 ergibt ([Ü]). Für alle $x, y \in K$ gilt

1. Esi ist $x \cdot y = 0_K$ genau dann, wenn $x = 0_K$ oder $y = 0_K$
2. $-(-x) = x$
3. $(x^{-1})^{-1} = x \quad (x \neq 0_K)$
4. $-(xy) = (-x)y = x(-y)$
5. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad (x, y \neq 0_K)$

Beispiel 2.5 1. Es sei $\mathbb{Q} := \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\text{rationale Zahlen}\}$ (Dabei werden p/q und p'/q' als gleich angesehen, falls

$$pq' = qp'$$

gilt. Eine Eindeutigkeit der Darstellung erhält man etwa durch die Forderung

$$x = \frac{p}{q}$$

wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind.)
Wir definieren wie üblich für $x = p/q$ und $y = r/s \in \mathbb{Q}$

$$x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{ps + rq}{qs}$$

und

$$x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{pr}{qs}$$

(man sieht leicht, dass diese Definitionen unabhängig von den gewählten Darstellungen für x und y sind).

2. Es sei $K = \{oh, ei\}$ mit den Rechenoperationen

$+$	oh	ei
oh	oh	ei
ei	ei	oh

$\cdot$	oh	ei
oh	oh	oh
ei	oh	ei

Dann ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit $oh = 0_K$ und $ei = 1_K$ (Beweis: [Ü]).

3. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation bilden keine Körper.

Definition 2.6 Wir definieren nun Summen und Produkte für mehr als zwei Summanden bzw. Faktoren: Sind $x_1, \ldots, x_n \in K$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so setzen wir

$$\sum_{\nu=1}^{1} x_\nu := x_1 \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{k+1} x_\nu := \left(\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu\right) + x_{k+1} \text{ für } k = 1, \ldots, n-1$$

und

$$\prod_{\nu=1}^{1} x_\nu := x_1 \quad \text{und} \quad \prod_{\nu=1}^{k+1} x_\nu := \left(\prod_{\nu=1}^{k} x_\nu\right) \cdot x_{k+1} \text{ für } k = 1, \ldots, n-1.$$

Ist speziell $x_1 = \ldots = x_n =: x$, so schreiben wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x =: nx$$

und
$$\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} x =: x^n \, .$$
Schließlich setzen wir noch für $n \in \mathbb{N}$
$$(-n)x := n(-x)\,, \qquad x^{-n} := (x^{-1})^n$$
und
$$0 \cdot x := 0_K\,,\ x^0 := 1_K \quad \text{wobei 0 die Null in } \mathbb{Z} \text{ bezeichnet}\,.$$

Eng verbunden mit dem eben verwendeten Prinzip der rekursiven oder induktiven Definition ist das Beweisverfahren der vollständigen Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Zum Beweis der Behauptung

"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$"

geht man oft folgendermaßen vor:

1. Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist (*Induktionsanfang*).
2. a) Man nimmt an, dass $A(k)$ (oder auch $A(1), \ldots, A(k)$) für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ richtig ist (*Induktionsannahme*).
   b) Man zeigt, dass aus der Richtigkeit von $A(k)$ (bzw. $A(1), \ldots, A(k)$), d. h. aus der Induktionsannahme, die Richtigkeit von $A(k+1)$ folgt (*Induktionsschritt*).

Dieses Beweisschema nennt man *Induktionsbeweis* oder *vollständige Induktion.* Aus 1. und 2. ergibt sich, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, denn es ist ja

$n = 1$: $A(1)$ richtig nach 1.
$n = 2$: $A(2)$ richtig nach 2., wenn dort $k = 1$ gesetzt wird
$n = 3$: $A(3)$ richtig nach 2., wenn dort $k = 2$ gesetzt wird
u.s.w

Manchmal möchte man statt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0, n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ zeigen. Dann macht man den Induktionsanfang nicht für $n = 1$, sondern für $n = N$ und den Induktionsschritt von k auf $k+1$ für beliebiges $k \geq N$.

Ein typischer Induktionsbeweis ist der Beweis zu

Satz 2.7 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*
$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2} \, .$$

Beweis.

1. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{\nu=1}^{1} \nu = \frac{1 \cdot 2}{2}$ (d. h. $A(1)$ gilt).

2. a) Induktionsannahme: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $\sum\limits_{\nu=1}^{k} \nu = \frac{k(k+1)}{2}$ (d. h. $A(k)$ gelte).

   b) Wir zeigen: aus a) folgt $\sum\limits_{\nu=1}^{k+1} \nu = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (d. h. $A(k+1)$ folgt).

   Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{k+1} \nu &= \left(\sum_{\nu=1}^{k} \nu\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} .\end{aligned}$$

□

Wir kommen noch einmal auf das Summen- und das Produktzeichen zu sprechen.

Bemerkung 2.8 Ist $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijektiv, so gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{\varphi(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \quad \text{und} \quad \prod_{\nu=1}^{n} x_{\varphi(\nu)} = \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu$$

Damit wird folgende Schreibweise sinnvoll: Ist I eine n-elementige Menge und sind $x_j \in K$ für $j \in I$, so setzen wir

$$\sum_{j \in I} x_j := \sum_{\nu=1}^{n} x_{j_\nu} \text{ und } \prod_{j \in I} x_j := \prod_{\nu=1}^{n} x_{j_\nu}$$

wobei $I = \{j_1, \ldots, j_n\}$ eine beliebige Nummerierung von I ist. Es ergibt sich damit weiter: Ist $x \in K$, so folgt

$$\sum_{j \in I} x \cdot x_j = x \cdot \sum_{j \in I} x_j$$

und ist $I = \bigcup\limits_{\mu=1}^{m} I_\mu$ mit $I_\mu \cap I_{\mu'} = \emptyset$ für $\mu \neq \mu'$, so folgt für $y_\mu := \sum\limits_{j \in I_\mu} x_j$

$$\sum_{j \in I} x_j = \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu \, (= \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{j \in I_\mu} x_j)$$

sowie für $z_\mu := \prod\limits_{j \in I_\mu} x_j$

$$\prod_{j \in I} x_j = \prod_{\mu=1}^{m} z_\mu \, (= \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{j \in I_\mu} x_j) .$$

Die obigen Beziehungen verallgemeinern die entsprechenden Axiome (K.1), (K.2) sowie (K.6). Die Beweise ergeben sich (nicht ganz leicht!) per Induktion.
Weiter kann man hiermit zeigen, dass für $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $x_1, x_2, x \neq 0$ folgende Potenzgesetze gelten:

$$\begin{aligned} x^{m_1} x^{m_2} &= x^{m_1+m_2} \, , \\ x_1^m x_2^m &= (x_1 x_2)^m \, , \\ (x^{m_1})^{m_2} &= x^{m_1 m_2} \, . \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt Körper, die neben den algebraischen Strukturen "+" und "·" eine Ordnungsstruktur haben.

Definition 2.9 Es sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann heißt $K = (K, +, \cdot, <)$ *geordnet*, wenn auf K eine Relation $<$ gegeben ist, die folgenden Ordnungsaxiomen genügt.

(O.1) Für alle $x, y \in K$ gilt genau eine der Beziehungen
$x = y$ oder $x < y$ oder oder $y < x$
(Trichotomiegesetz).

(O.2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivgesetz).

(O.3) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in K$ (1. Monotoniegesetz).

(O.4) Aus $x < y$ und $0_K < z$ folgt $xz < yz$ (2. Monotoniegesetz).

Für $x < y$ schreiben wir auch $y > x$. Außerdem bedeutet $x \leq y$, dass entweder $x = y$ oder $x < y$ gilt. Dann schreibt man auch $y \geq x$. Wir nennen $x \in K$ *positiv*, falls $x > 0_K$ gilt und *negativ*, falls $x < 0_K$ gilt.

Beispiel 2.10 Es sei $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation (B. 2.5.1). Wir setzen

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \qquad (p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, q_1, q_2 \in \mathbb{N})$$

falls $p_1 q_2$ kleiner als $p_2 q_1$ in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Dann ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper.

Satz 2.11 *Es seien $K = (K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt*

1. *Es ist $x > 0_K$ genau dann, wenn $-x < 0_K$ ist,*
2. *Aus $x, y < 0_K$ oder $x, y > 0_K$ folgt $xy > 0_K$,*
3. *Für $x \neq 0_K$ ist $x^2 > 0_K$, insbesondere also $1_K = 1_K^2 > 0_K$,*

4. *Aus* $0_K < x < y$ *folgt* $0_K < y^{-1} < x^{-1}$.

Beweis.

1. Aus $0 < x$ folgt mit (O.3)
$$-x = 0 + (-x) < x + (-x) = 0 ,$$
d. h. $-x < 0$. Entsprechend folgt aus $-x < 0$ auch $0 = x + (-x) < x + 0 = x$.

2. Sind $x, y > 0$ so folgt mit (O.4) sofort $0 = 0y < xy$.
Es seien $x, y < 0$. Aus $x < 0$ folgt $-x > 0$ nach 1. Wegen $y < 0$ ergibt sich mit (O.4)
$$-(xy) = y(-x) < 0(-x) = 0 ,$$
also $xy > 0$ mit 1.

3. Ergibt sich unmittelbar aus 2. und (O.1).

4. Wir zeigen zunächst: $x^{-1} > 0$. (Denn: Angenommen, es ist $x^{-1} < 0$ (beachte $x^{-1} \neq 0$). Dann folgt mit (O.4) $1 = xx^{-1} < x0 = 0$ im Widerspruch zu 3.) Genauso ist $y^{-1} > 0$. Damit ergibt sich aus $x < y$ mit (O.4) $xy^{-1} < yy^{-1} = 1$ und wieder mit (O.4) $x^{-1}xy^{-1} < x^{-1}1 = x^{-1}$, also $y^{-1} < x^{-1}$.

□

Bemerkung 2.12 Es sei K ein geordneter Körper. Per Induktion sieht man leicht:

1. Ist $x < y$, so ist auch $nx < ny$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

2. Ist $x > 0_K$, so ist auch $nx > mx > 0_K$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$,

3. Ist $0_K < x < y$, so ist auch $0_K < x^n < y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere erhält man aus $1_k > 0_K$ damit $n1_K > m1_K > 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Als Folgerung ergit sich, dass jeder geordnete Körper unendlich viele Elemente enthält!
Aus S. 2.11.4 folgt weiter $0_K < (n1_K)^{-1} < (m1_k)^{-1}$. Setzt man also für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$
$$x/n := x \cdot (n1_K)^{-1},$$
so ergibt sich damit für alle $x > 0_K$
$$x > x/2 > x/3 > x/4 \cdots > 0_K.$$
Also liegen zwischen 0_K und x unendlich viele Elemente aus K. Entsprechend gilt für $y < x$ auch $y < y + (x - y)/n < x$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Wir beweisen zum Abschluss eine sehr nützliche Ungleichung.

Satz 2.13 *(Bernoullische Ungleichung)*
Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $x \in K, x \geq -1_K$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1_K + x)^n \geq 1_K + nx \; .$$

Beweis. Es sei $x \geq -1$ fest. Wir führen den Beweis per Induktion nach n.

1. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar.

2. Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Dann folgt mit (O.4)

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1 + kx + x + x(kx) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x \end{aligned}$$

(man beachte: es ist $x^2 \geq 0$ und damit auch $kx^2 \geq 0$).

$\square$

3 Geometrische Summenformel und binomische Formel

Eine wichtige Formel für Summen von Potenzen in Körpern ist die

Satz 3.1 *(geometrische Summenformel) Für alle $x \in K \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu \tag{3.1}$$

Beweis. Wir zeigen: $1-x^n = (1-x)\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x^\nu$. Da $x \neq 1$ und damit $1-x \neq 0$ ist, ergibt sich hieraus die Behauptung.
Es gilt

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu &= \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu - x\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} x\cdot x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} x^{\nu+1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu - \sum_{\mu=1}^{n} x^\mu = 1-x^n\ .\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2 Allgemeiner kann man zeigen ([Ü]): Ist K ein Körper und sind $a,b \in K$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b^n - a^n = (b-a)\sum_{nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-1-\nu}\ .$$

Neben der geometrischen Summenformel gibt es eine weitere Formel in Körpern, die von fundamentaler Bedeutung ist, die sog. binomische Formel. Hierauf wollen wir nun lossteuern. Es handelt sich dabei um eine Summenformel für die Ausdrücke $(a+b)^n$, wobei $a,b \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Bekanntlich gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\ .\end{aligned}$$

Um eine allgemeine Formel angeben zu können, brauchen wir

Definition 3.3 1. Wir definieren $n!$ (*"n-Fakultät"*) für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$n! := \prod_{\nu=1}^{n} \nu \,,$$

wobei $\prod\limits_{\nu=m}^{n} x_\nu := 1$ im Falle $n < m$ gesetzt ist (also $0! = 1$).

2. Für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\binom{n}{\nu} := \frac{\prod\limits_{k=n-\nu+1}^{n} k}{\nu!}$$

Die Zahlen $\binom{n}{\nu}$ heißen *Binomialkoeffizienten.*

Es gilt also etwa

$$\begin{aligned} 6! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \,, \qquad 10! = 3.628.800 \,, \\ \binom{7}{5} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21 \end{aligned}$$

Wir stellen einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten zusammen.

Satz 3.4 *Es seien $n, \nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

1. $\displaystyle\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$, *falls* $\nu \leq n$
2. $\displaystyle\binom{n}{\nu} = 0$, *falls* $\nu > n$
3. $\displaystyle\binom{n}{\nu} = \binom{n}{n-\nu}$, *falls* $\nu \leq n$

Beweis.

1. Es gilt für $\nu \leq n$

$$\binom{n}{\nu} = \frac{\prod\limits_{k=n-\nu+1}^{n} k}{\nu!} = \frac{\prod\limits_{k=n-\nu+1}^{n} k}{\nu!} \cdot \frac{(n-\nu)!}{(n-\nu)!} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

2. Für $\nu > n$ ist $n - \nu + 1 \leq 0$ und damit $\prod\limits_{k=n-\nu+1}^{n} k = 0$, also auch $\binom{n}{\nu} = 0$.

3. Nach 1. gilt
$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \frac{n!}{(n-(n-\nu))!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu}.$$
□

Besonders wichtig ist folgende Rekursionsformel:

Satz 3.5 *Für $n, \nu \in \mathbb{N}$ gilt*
$$\binom{n+1}{\nu} = \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu}$$

Beweis. Nach S. 3.4.1 gilt für $\nu \in \{1, \dots, n\}$
$$\begin{aligned}
\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} &= \frac{n!}{(\nu-1)!(n-\nu+1)!} + \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \\
&= \frac{n!}{\nu!(n+1-\nu)!}\left\{\frac{\nu!}{(\nu-1)!} + \frac{(n+1-\nu)!}{(n-\nu)!}\right\} = \\
&= \frac{n!}{\nu!(n+1-\nu)!}\{\nu + (n+1-\nu)\} = \frac{(n+1)!}{\nu!(n+1-\nu)!} = \binom{n+1}{\nu}.
\end{aligned}$$
Für $\nu = n+1$ ist nach S. 3.4.2
$$\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n}{n} + 0 = 1 = \binom{n+1}{\nu}$$
und für $\nu > n+1$ sind beide Seiten $= 0$. □

Ordnet man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\nu}$ in einem dreieckigen Schema an, wobei in der n-ten Zeile die Koeffizienten $\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{n}$ stehen, so entsteht das sog. *Pascal'sche Dreieck*:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\binom{n}{0} \; \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{\nu-1} \; \binom{n}{\nu} \cdots \binom{n}{n} \\
\binom{n+1}{0} \; \binom{n+1}{1} \; \cdots \binom{n+1}{\nu} \cdots \; \binom{n+1}{n+1}
\end{array}$$

Die ersten Zeilen berechnen sich etwa unter Ausnutzung von S. 3.5 zu

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&&1&&&&&& \\ &&&&&1&&1&&&&& \\ &&&&1&&2&&1&&&& \\ &&&1&&3&&3&&1&&& \\ &&1&&4&&6&&4&&1&& \\ &1&&5&&10&&10&&5&&1& \\ 1&&6&&15&&20&&15&&6&&1 \end{array}$$

Damit gilt

Satz 3.6 *Es sei K ein Körper, und es seien $a, b \in K$ sowie $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

Beweis.
1. Für $n = 0$ gilt $(a+b)^0 = 1 = \sum\limits_{\nu=0}^{0} \binom{0}{\nu} a^\nu b^{0-\nu}$.
2. Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$(a+b)^k = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^\nu b^{k-\mu}\ .$$

Dann gilt mit S. 3.5

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k = (a+b)\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^\nu b^{k-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^{\nu+1} b^{k-\nu} + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^\nu b^{k-\nu+1} \\ &= \sum_{\mu=1}^{k+1} \binom{k}{\mu-1} a^\mu b^{k-(\mu-1)} + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^\nu b^{k-\nu+1} \\ &= 1 \cdot a^{k+1} + \sum_{\nu=1}^{k} \binom{k+1}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} + 1 \cdot b^{k+1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{k+1}{\nu} a^\nu b^{k+1-\nu}\ . \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 3.7 Es gilt etwa

$$\begin{aligned}(a+b)^6 &= \sum_{\nu=0}^{6}\binom{6}{\nu}a^\nu b^{n-\nu}\\ &= 1\cdot b^6+6\cdot ab^5+15a^2b^4+20a^3b^3+15a^4b^2+6a^5b+1\cdot a^6\ .\end{aligned}$$

Bemerkung 3.8 Als Spezialfälle aus S. 3.6 ergeben sich interessante Beziehungen für das Pascal'sche Dreieck:
Für ($K=\mathbb{Q}$ und) $a=1, b=1$ ergibt sich

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}1^\nu 1^{n-\nu}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\ ,$$

d. h. die Summe der Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks ergibt stets 2^n.
Für $a=-1, b=1$ ergibt sich für $n\in\mathbb{N}$

$$0=0^n=(-1+1)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(-1)^\nu 1^{n-\nu}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(-1)^\nu\ ,$$

d. h. versieht man die Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile jeweils abwechselnd mit dem Vorzeichen $+$ und $-$, so erhält man als Summe 0.
Für $n=6$ gilt etwa

$$1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$$

und

$$1-6+15-20+15-6+1=0\ .$$

4 Reelle und komplexe Zahlen

Wir stellen zunächst einige wichtige Ergebnisse zusammen, die im Anhang bewiesen werden.

Bemerkung und Definition 4.1 Es existiert ein (ordnungs-) vollständiger, geordneter Körper $\mathbb{R}$ mit ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset$) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (genauer: der geordnete Körper $\mathbb{Q}$ ist eingebettet in den geordneten Körper $\mathbb{R}$, d. h., es existiert eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ sowie $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ und so, dass $x < y$ genau dann erfüllt ist, wenn $\varphi(x) < \varphi(y)$ gilt). Ferner ergibt sich dabei:

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.

Insbesondere existiert damit zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.
Die Elemente von $\mathbb{R}$ heißen *reelle Zahlen*.
Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ergibt sich (siehe S. Z2.7): Für alle $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ mit $x^n = c$. Wir schreiben dafür $x =: \sqrt[n]{c}$ und im Falle $n = 2$ kurz $x =: \sqrt{c}$. Dabei ergibt sich für $c, d \in \mathbb{R}$, $c, d \geq 0$ aus den entsprechenden Potenzgesetzen aus B. 2.8 leicht ([Ü])

$$\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c}\,\sqrt[n]{d} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[nm]{c}\,.$$

Schliesslich setzen wir noch für $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a \leq b$)

$$\begin{array}{lcllcl}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & (-\infty, b] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & (-\infty, b) & := & \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
[a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & [a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & (a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
 & & & (\infty, \infty) & := & \mathbb{R}\,,\ (-\infty, 0) = \mathbb{R}_-\,,\ (0, \infty) = \mathbb{R}_+
\end{array}$$

Diese Mengen heißen *Intervalle*.

Wie wir eben bemerkt haben, hat in $\mathbb{R}$ jede Gleichung $x^n = c$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c \geq 0$ eine Lösung. Leider gilt dies nicht mehr im Falle $c < 0$ und n gerade (da $x^n \geq 0$ für gerades n und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ nach S. 2.11.3). Unser Ziel ist es nun, den Körper der reellen Zahlen so zu "erweitern", dass $x^n = c$ auch für $c < 0$ (also etwa $x^2 = -1$) lösbar ist.

Bemerkung und Definition 4.2 Wir setzen

$$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad (= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

und für $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

sowie

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2 \ , \ x_1 y_2 + x_2 y_1) \ .$$

Man rechnet leicht nach, dass dann $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist. $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt *Körper der komplexen Zahlen* und $z \in \mathbb{C}$ heißt *komplexe Zahl.*
Dabei ist die Null in $\mathbb{C}$ gegeben durch $0 = 0_{\mathbb{C}} = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$ und die Eins in $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $1 = 1_{\mathbb{C}} = (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$. Weiter sieht man: Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, so gilt

$$-z = (-x, -y) \qquad \text{und} \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{für } z \neq 0 \ .$$

Wir nennen für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re} z := x \qquad \textit{Realteil} \text{ von } z$$

und

$$\operatorname{Im} z := y \qquad \textit{Imaginärteil} \text{ von } z \ .$$

Beispiel 4.3 Es sei $z_1 = (3, -1), \ z_2 = (2, 4)$.
Dann gilt $z_1 + z_2 = (5, 3), \ z_1 - z_2 = (3, -1) + (-2, -4) = (1, -5)$ und

$$z_1 \cdot z_2 = (3, -1) \cdot (2, 4) = (6 - (-4), 12 - 2) = (10, 10) \ .$$

Bemerkung 4.4 Wir können $\mathbb{R}$ als “Teilkörper” in $\mathbb{C}$ wiederfinden. (Genauer: $\mathbb{R}$ ist eingebettet in $\mathbb{C}$ vermittels der Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(x) := (x, 0) \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Man leicht, dass φ injektiv ist und die Körperstruktur erhält, d. h. es ist $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ sowie $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$).
Damit können wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Den reellen Zahlen entsprechen die komplexen Zahlen mit Imaginärteil $= 0$. *Wir schreiben dann auch kurz x statt* $(x, 0)$.
Man nennt weiterhin

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

die *imaginäre Einheit* in $\mathbb{C}$. Für i gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \,.$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy \ (= \ \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)$$

schreiben. Diese Darstellung heißt *Normaldarstellung* von z.
So gilt etwa

$$\begin{aligned} z_1 = (3, -1) \quad &= \quad 3 + i(-1) \quad (= 3 - i) \\ z_2 = (2, 4) \quad &= \quad 2 + i4 \qquad\ \ (= 2 + 4i) \end{aligned}$$

Bemerkung 4.5 In $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist es nicht möglich, eine Ordnungsrelation $<$ (mit den Eigenschaften aus D. 2.9) zu definieren!
(Denn: Angenommen, doch. Dann gilt $1_{\mathbb{C}} > 0_{\mathbb{C}}$ nach S. 2.11.3, also $-1_{\mathbb{C}} < 0_{\mathbb{C}}$ nach S. 2.11.1. Für $z = i$ gilt mit S. 2.11.3 aber andererseits $0 < i^2 = -1_{\mathbb{C}}$ also Widerspruch zu (O.1).)

Definition 4.6 Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl.

1. Die komplexe Zahl $\overline{z} := x - iy$ heißt zu z *konjugiert komplex.*
2. Die Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$ heißt *Betrag* von z.

Geometrisch entsteht $\overline{z}$ durch Spiegelung von z an der reellen Achse. Der Betrag $|z|$ gibt anschaulich die Länge der Strecke von 0 zu z wieder (Pythagoras!)

Satz 4.7 *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
3. $\overline{(\overline{z})} = z$,
4. $|z|^2 = z\overline{z}$ *und damit* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ *falls* $z \neq 0$,
5. $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *und* $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Beweis. [Ü] □

Für das Rechnen mit Beträgen gelten folgende Regeln

Satz 4.8 *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$ *ist,*
2. $|z| = |\overline{z}|\,, \quad \mathrm{Re}\, z \leq |z|\,, \quad \mathrm{Im}\, z \leq |z|$,
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
4. $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad$ *("Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$").*

Beweis. 1. und 2. als [Ü].
3. Es gilt

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2 \ .$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung.
4. Es gilt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = \\ &= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \overset{2.}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\overset{2./3.}{=} |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung für $z_1 + z_2$. Damit erhält man dann auch

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| \ .$$

□

Beispiel 4.9 Es gilt für $z_1 = (3, -1) = 3 - i, z_2 = (2, 4) = 2 + 4i$

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\,, \qquad |z_2| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \\ \overline{z_1} &= 3 - (-i) = 3 + i \\ z_1\overline{z_1} &= (3-i)(3+i) = 9 - 3i + 3i - i^2 = 9 + 1 \left(= |z_1|^2\right) \end{aligned}$$

Definition 4.10 In Verallgemeinerung von D. 3.3 setzen wir noch für $z \in \mathbb{C}$ und $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{z}{\nu} := \frac{\prod_{k=1}^{\nu}(z - \nu + k)}{\nu!} = \begin{cases} \dfrac{z(z-1)\cdots(z-\nu+1)}{\nu!}, & \text{falls} \quad \nu > 0 \\ 1, & \text{falls} \quad \nu = 0 \end{cases}$$

Die Zahlen $\binom{z}{\nu} \in \mathbb{C}$ heißen ebenfalls *Binomialkoeffizienten.*

5 Folgen

Es sei $a : \mathbb{N} \to Y$, wobei Y eine beliebige Menge ist. Wir schreiben dann üblicherweise n als "Index", d. h.

$$a_n := a(n)$$

und statt a schreiben wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (a_n). Mann nennt dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Folge (in Y)* . Allgemeiner betrachtet man auch Indexmengen $J \subset \mathbb{N}$ oder $J \subset \mathbb{Z}$ (mit ∞ vielen Elementen) und schreibt dann $(a_n)_{n\in J}$ statt $a : J \to Y$. Solche Objekte heißen auch *Folgen* (in Y).
Folgen können entweder durch explizite Angabe von a_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ (oder $n \in J$) gegeben sein (etwa $a_n = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$) oder induktiv oder rekursiv, d. h. durch eine sog. Rekursionsformel:

$$a_1 := a; \qquad a_{n+1} := \varphi(a_n)$$

wobei $\varphi : Y \to Y$ eine Funktion und $a \in Y$ ist (etwa: $\varphi(y) = \sqrt{y}$ mit $Y = [0, \infty)$ und $a = 2$, d. h. $a_1 := 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$).
Meist betrachten wir $Y = \mathbb{R}$ (Folgen reeller Zahlen) oder $Y = \mathbb{C}$ (Folgen komplexer Zahlen). Um die beiden Fälle $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ einheitlich bezeichnen zu können, schreiben wir $\mathbb{K} := K$, falls $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 5.1 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt

1. *beschränkt*, falls ein $M > 0$ existiert mit $|a_n| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$. (Anderenfalls heißt (a_n) *unbeschränkt.*)

2. *Cauchy-Folge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N_\varepsilon.$$

3. *konvergent*, falls ein $a \in \mathbb{K}$ so existiert, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

   Die Zahl a heißt dann *Grenzwert* von (a_n) und wir schreiben

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{oder kurz} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty)\ .$$

   (Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent.*)

Bemerkung 5.2 1. Man sieht leicht, dass jede Folge höchstens einen Grenzwert hat ([Ü]).
2. Es sei $A(n)$ eine Aussage $(n \in \mathbb{N})$. Man sagt, $A(n)$ gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, falls die Menge $\{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist nicht wahr}\}$ endlich ist. So lässt sich etwa die Konvergenz

einer Folge auch folgendermaßen formulieren: (a_n) ist genau dann konvergent gegen a, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 5.3 1. Die Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ mit $a_n = n$ ist unbeschränkt (siehe B/D. 4.1).
2. Die Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ mit $a_n = 1/n$ ist konvergent zum Grenzwert $a = 0$, d. h.

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

(Denn: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/\varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ (wieder B/D. 4.1). Also gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon .)$$

3. Die Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt (da $|a_n| = 1$für alle $n \in \mathbb{N}$), aber keine Cauchy-Folge.
(Denn: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_{2k} - a_{2k+1}| = 2 ,$$

d. h. es existiert kein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$.)
Damit ist (a_n) auch divergent, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 5.4 *1. Jede Cauchy-Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ ist beschränkt.*
2. Jede konvergente Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis.
1. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < 1 \qquad (n, m \geq N) ,$$

also $|a_n| = |a_n - a + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < |a_N| + 1$ für alle $n \geq N$. Mit

$$M := \max \{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

gilt dann

$$|a_n| \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} .$$

2. Es sei $a := \lim a_n$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2\,(n \geq N_\varepsilon)$. Also gilt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N_\varepsilon .$$

□

Der folgende Satz ist sehr "praktisch", da er es in vielen Fällen gestattet, Grenzwerte zu bestimmen ohne auf die "ε-N_ε-Definition" zurückzugreifen.

Satz 5.5 *Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent mit*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n , \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Dann gilt

1. *Die Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$, d. h.*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \left(= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

2. *Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$, d. h.*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \left(= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

3. *Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$* **und** *$b \neq 0$, so konvergiert (a_n/b_n) gegen a/b d. h.*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b \left(= \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

Beweis.

1. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren ein $N_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$ und ein $N_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \ (n \geq N_\varepsilon^{(1)}) \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| < \varepsilon/2 \ (n \geq N_\varepsilon^{(2)}) .$$

Also gilt für $n \geq N_\varepsilon := \max(N_\varepsilon^{(1)}, N_\varepsilon^{(2)})$:

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

2. Nach S. 5.4 ist (b_n) beschränkt, d. h. es existiert ein $M > 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren ein $N_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$ mit

$$M|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geq N_\varepsilon^{(1)})$$

und ein $N_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}$ mit

$$|a||b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geq N_\varepsilon^{(2)}) .$$

Für alle $n \geq N_\varepsilon := \max(N_\varepsilon^{(1)}, N_\varepsilon^{(2)})$ gilt dann

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq \\ &\leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \leq M|a_n - a| + |a||b_n - b| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

3. a) Wir zeigen zunächst:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} \; .$$
Da $b \neq 0$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit
$$|b_n - b| < |b|/2 \qquad (n \geq N) \; .$$
Also gilt (umgekehrte Dreiecksungleichung!)
$$|b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - |b|/2 = |b|/2 > 0 \qquad (n \geq N) \; .$$
Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit
$$|b_n - b| < \varepsilon \cdot \frac{|b|^2}{2} \qquad (n \geq N'_\varepsilon) \; .$$
Für alle $n \geq N_\varepsilon := \max(N, N'_\varepsilon)$ folgt
$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \varepsilon \; .$$
Also gilt $1/b_n \to 1/b$ $(n \to \infty)$.

b) Mit 2. und a) ergibt sich
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = a \cdot \frac{1}{b} \; .$$

□

Beispiel 5.6 Es sei $a_n = \frac{3n^2 - 4n}{2n^2+5}$. Da für Folgen (c_n) mit $c_n = c$ $(n \in \mathbb{N})$ offenbar $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ gilt, folgt mit S. 5.5 und B. 5.3.2
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 4/n}{2 + 5/n^2} = \frac{3 - 4 \lim\limits_{n\to\infty} 1/n}{2 + 5 \lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2} = \frac{3 - 4 \cdot 0}{2 + 0} = \frac{3}{2} \; .$$

Bemerkung 5.7 Ein weiteres, einfaches aber sehr nützliches Konvergenzkriterium ist das folgende: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und es sei (b_n) eine Folge mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n. Gilt dann $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, so folgt auch $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.
(Denn: Es sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq N$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, wobei o.E. $N_\varepsilon \geq N$, mit $b_n < \varepsilon$ $(n \geq N_\varepsilon)$ Dann ist auch $|a_n - 0| \leq b_n < \varepsilon$ $(n \geq N_\varepsilon)$.)

Als wichtiges Anwendungsbeispiel erhalten wir

Beispiel 5.8 (geometrische Folge)
Wir betrachten für $q \in \mathbb{C}$ die Folge $(q^n)_n$. Dann gilt

1. Für $|q| < 1$ konvergiert (q^n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

2. Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt, also insbesondere divergent.

(Denn:
1. Für $q = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist mit einem $a > 0$

$$1/|q| = 1 + a\ .$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung (S. 2.13) folgt $(1 + a)^n \geq 1 + na > na$ und daher

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{na} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Aus $1/(an) \to 0$ folgt mit B. 5.7 die Behauptung.
2. Nun sei $|q| > 1$, d. h. $|q| = 1 + b$ mit einem $b > 0$. Mit S. 2.13 gilt

$$|q^n| = (1 + b)^n \geq 1 + nb \qquad (n \in \mathbb{N})\ ,$$

d. h. (q^n) ist unbeschränkt und damit nach S. 5.4 divergent.).

Wir betrachten nun speziell Folgen reeller Zahlen, wobei wir entscheidend von der Ordnungsstruktur in $\mathbb{R}$ Gebrauch machen.

Bemerkung und Definition 5.9 Manchmal erweist es sich als nützlich, für reelle Folgen (a_n) erweiterte Grenzwerte $\pm\infty$ zu betrachten. Wir sagen deshalb

1. (a_n) heißt *bestimmt divergent* gegen ∞, falls zu jedem $R > 0$ ein $N_R \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > R$ für alle $n \geq N_R$. Wir schreiben dann $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$

2. (a_n) heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, falls zu jedem $R > 0$ ein $N_R \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < -R$ für alle $n \geq N_R$. Wir schreiben dann $a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$

So gilt etwa

$$q^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

im Falle $q > 1$, aber für $q < -1$ ist (q^n) weder bestimmt divergent gegen ∞ noch bestimmt divergent gegen $-\infty$.

Wir untersuchen jetzt eine wichtige Klasse von Folgen in $\mathbb{R}$, die monotonen Folgen.

Definition 5.10 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann heißt (a_n)

1. *monoton wachsend*, falls $a_{n+1} \geq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Schreibweise: $a_n \nearrow$),
2. *streng monoton wachsend*, falls $a_{n+1} > a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Schreibweise: a_n streng $\nearrow$),
3. *monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Schreibweise: $a_n \searrow$),
4. *streng monoton fallend*, falls $a_{n+1} < a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (Schreibweise: a_n streng $\searrow$).

Beispiel 5.11 Es gilt

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ ist streng monoton fallend,
2. $(2^n)_n$ ist streng monoton wachsend,
3. $\Big((-1)^n\Big)_n$ ist weder monoton wachsend, noch monoton fallend,
4. $(1)_n$ ist monoton wachsend und fallend, aber nicht streng monoton wachsend oder fallend.

Eine fundamentale Folgerung aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist

Satz 5.12 *(Hauptsatz über monotone Folgen)*
Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

1. *Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so ist (a_n) konvergent.*
   Ist (a_n) monoton wachsend und unbeschränkt, so gilt $a_n \to \infty$.
2. *Ist (a_n) monoton fallend und beschränkt, so ist (a_n) konvergent.*
   Ist (a_n) monoton fallend und unbeschränkt, so gilt $a_n \to -\infty$.

Beweis. 1. Es sei (a_n) beschränkt. Wir betrachten die Menge

$$A := \{x : x = a_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} .$$

Dann ist $A \neq \emptyset$ und (nach oben) beschränkt. Da $\mathbb{R}$ ollständig ist, existiert

$$a := \sup A .$$

Wir zeigen: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Da a obere Schranke von A ist, gilt $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist (nach Definition von $\sup A$) $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von A, d. h. es existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_N > a - \varepsilon$. Da (a_n) monoton wachsend ist, gilt $a_n \geq a_N > a - \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also insgesamt

$$a - \varepsilon < a_n \leq a \qquad (n \geq N)$$

d. h.

$$-\varepsilon \leq a_n - a \leq 0 \qquad (n \geq N)$$

und damit insbesondere $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.
Nun sei (a_n) unbeschränkt. Da (a_n) monoton wachsend ist, gilt insbesondere $a_n \geq a_1$ für alle n. Damit existiert zu jedem $R > 0$ ein N mit $a_n > R$. Wieder auf Grund der Monotonie ist damit auch $a_n > R$ für alle $n \geq N$. Da $R > 0$ beliebig war, gilt $a_n \to \infty$.
2. Ist (a_n) monoton fallend, so geht der Beweis entsprechend. □

Der Hauptsatz über monotone Folgen ist eines der wichtigsten Kriterien für die Konvergenz von Folgen. Man beachte, dass der Grenzwert bei der Konvergenzuntersuchung nicht eingeht (und dass auch keine Aussage über den Grenzwert gemacht wird).

Beispiel 5.13 (Eulersche Zahl e)
Wir betrachten die Folgen (a_n) und (b_n) in $\mathbb{R}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Dann ist (a_n) (streng) monoton wachsend und (b_n) (streng) monoton fallend.
(Denn: Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n}\right)^{n-1} = \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \overset{S.2.13}{\geq} \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right) = \frac{n^3+1}{n^3} > 1 . \end{aligned}$$

Der Beweis für (b_n) verläuft analog; [Ü])
Hieraus folgt $2 = a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 = 4$.
Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen sind (a_n) und (b_n) konvergent und mit S. 5.5.2 folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n) a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Wir setzen

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(e heißt *Eulersche Zahl*).

Beispiel 5.14 (Babylonisches Wurzelziehen)

Es sei $x > 0$ gegeben. Ein sehr effizientes Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{x}$ ist das sog. Babylonische Wurzelziehen:
Wir betrachten mit einem beliebigen Startwert $a_0 > 0$ die Folge (a_n) in $(0, \infty)$ mit

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 + x\right) .$$

(Der Startwert a_0 kann eine grobe Näherung an $\sqrt{x}$ sein.)

Behauptung: (a_n) ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

Denn: 1. Wir zeigen: $a_n \geq \sqrt{x}$ $(n \in \mathbb{N})$. Denn: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_{n+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - 2a_n\sqrt{x} + x) = \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{x})^2 \geq 0 ,$$

also ist $a_{n+1} \geq \sqrt{x}$.
2. Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend, denn für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - x\right) .$$

Aus $a_n \geq \sqrt{x}$ folgt $a_n^2 \geq x$, also $a_n - a_{n+1} \geq 0$.
3. Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen ist (a_n) konvergent. Zur Bestimmung des Grenzwertes kann man folgendermaßen vorgehen:
Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, und damit (da $a \geq \sqrt{x} > 0$)

$$a \longleftarrow a_{n+1} = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 + x\right) \longrightarrow \frac{1}{2a}\left(a^2 + x\right) \qquad (n \to \infty) .$$

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt

$$a = \frac{1}{2a}\left(a^2 + x\right) ,$$

woraus man $a = \sqrt{x}$ berechnet (beachte $a > 0$).

Man kann also die Folgeglieder a_n als Näherungen für $\sqrt{x}$ verwenden (dabei sind im Falle $x \in \mathbb{Q}$ und $a_0 \in \mathbb{Q}$ die Näherungen a_n stets rationale Zahlen).
Wie sieht es dabei mit dem Fehler aus, wenn man a_n statt $\sqrt{x}$ verwendet? Wir schätzen den Fehler nach oben ab. Dazu sei

$$a_n = \sqrt{x}(1 + f_n)$$

($f_n = \frac{a_n - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ heißt "relativer Fehler"). Dann gilt $f_n \geq 0$ und

$$1 + f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + f_n + \frac{1}{1 + f_n}\right) ,$$

also

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f_n^2}{1+f_n} \leq \frac{1}{2}\min(f_n, f_n^2)(= \frac{1}{2}f_n^2\,,\ \text{falls } f_n < 1)\ .$$

Hat man nach n Schritten für a_n einen Fehler $f_n \leq 10^{-m}$, so ist der Fehler f_{n+1} dem nächsten Schritt $\leq \frac{1}{2}(10^{-m})^2 = \frac{1}{2}10^{-2m}$; die Anzahl der "exakten Stellen" verdoppelt sich im Wesentlichen.

Bemerkung und Definition 5.15 Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Mengen

$$B_n := \{a_k : k \geq n\}$$

Es gilt dabei $B_{n+1} \subset B_n$ (und die B_n sind beschränkt). Also existieren

$$\overline{b_n} := \sup B_n \quad \text{und} \quad \underline{b_n} := \inf B_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und nach Definition von sup und inf sind die Folgen $(\overline{b_n})$ bzw. $(\underline{b_n})$ monoton fallend bzw. monoton wachsend (und beschränkt, da $\underline{b_1} \leq \underline{b_n} \leq \overline{b_n} \leq \overline{b_1}$). Also sind beide Folgen konvergent nach dem Hauptsatz über monotone Folgen. Damit existieren

$$\overline{a} := \lim_{n\to\infty} \overline{b_n} \qquad \text{und} \qquad \underline{a} := \lim_{n\to\infty} \underline{b_n}$$

Die reelle Zahl $\overline{a}$ heißt *Limes superior* von (a_n) (Schreibweise: $\overline{a} =: \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ oder auch $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$), und $\underline{a}$ heißt *Limes inferior* von (a_n) (Schreibweise: $\underline{a} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ oder auch $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$).

Satz 5.16 *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, und es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. *Es ist $a = \overline{\lim} a_n$ genau dann, wenn folgende beiden Bedingungen gelten:*
   a) *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n < a + \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*
   b) *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n > a - \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Es ist $a = \underline{\lim} a_n$ genau dann, wenn folgende beiden Bedingungen gelten:*
   a) *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n > a - \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*
   b) *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n < a + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. 1. "$\Longrightarrow$" Es sei $a = \overline{\lim} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein N_ε mit $a - \varepsilon < \sup\{a_k : k \geq n\} < a + \varepsilon$ $(n \geq N_\varepsilon)$. Aus der zweiten Ungleichung ergibt sich insbesondere $a_n < a + \varepsilon$ $(n \geq N_\varepsilon)$. Aus der ersten Ungleichung folgt, dass für jedes $n(\geq N_\varepsilon)$ ein $k \geq n$ existiert mit $a - \varepsilon < a_k$. Damit gilt auch b).

"$\Longleftarrow$" Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Aus a) folgt

$$\overline{b_n} = \sup\{a_k : k \geq n\} \leq a + \varepsilon$$

für fast alle n. Also ist

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{b_n} \leq a + \varepsilon\ .$$

Aus b) folgt $\overline{b_n} > a - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ergibt sich

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{b_n} \geq a - \varepsilon\ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq a$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq a$, also insgesamt $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2. Der Beweis für $\varliminf a_n$ verläuft analog. □

Beispiel 5.17 Es sei $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Dann ergibt sich mit S. 5.16

$$\varlimsup a_n = 1 \qquad \text{und} \qquad \varliminf a_n = -1.$$

Satz 5.18 *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
2. *(a_n) ist genau dann konvergent, wenn $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt (und in diesem Fall ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$).*

Beweis. 1. Teil 1. ergibt sich sofort aus

$$\underline{b_n} = \inf\{a_k : k \geq n\} \leq \overline{b_n} = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

und

$$\varliminf a_n = \lim \underline{b_n}\ , \qquad \varlimsup a_n = \lim \overline{b_n}\ .$$

2. "$\Longrightarrow$" Es sei (a_n) konvergent, $\lim a_n =: a$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \text{für fast alle } n \geq N_\varepsilon\ .$$

Also sind a) und b) aus S. 5.16.1 und 2. erfüllt und folglich gilt mit S. 5.16

$$\lim a_n = \varlimsup a_n = \varliminf a_n.$$

"$\Longleftarrow$" Gilt $\varlimsup a_n = \varliminf a_n =: a$, so folgt aus S. 5.16 dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n < a + \varepsilon \qquad (n \geq N_\varepsilon^{(1)})$$

und ein $N_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n > a - \varepsilon \qquad (n \geq N_\varepsilon^{(2)})$$

existieren. Also gilt für $n \geq N_\varepsilon := \max(N_\varepsilon^{(1)}, N_\varepsilon^{(2)})$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist (a_n) konvergent mit $\lim a_n = a$. □

Damit gilt folgendes wichtige Konvergenzkriterium (für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$).

Satz 5.19 *(Cauchysches Konvergenzkriterium)*
Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Genau dann ist (a_n) konvergent wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. 1. Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) nach S. 5.4.2 eine Cauchy-Folge.
2. Es sei umgekehrt (a_n) eine Cauchy-Folge. Dann ist (a_n) jedenfalls beschränkt nach S. 5.4.1.
a) Zunächst sei (a_n) eine **reelle** Folge. Nach S. 5.18.2 genügt es, zu zeigen $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$. Angenommen, die ist nicht der Fall. Dann ist $\underline{\lim} a_n < \overline{\lim} a_n$ nach S. 5.18.1. Es sei $\varepsilon := (\overline{\lim} a_n - \underline{\lim} a_n)/3$.
Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad (n, m \geq N_\varepsilon) \ . \tag{$*$}$$

Außerdem existieren nach S. 5.16 ein $n_0 \geq N_\varepsilon$ mit

$$a_{n_0} > \overline{\lim} a_n - \varepsilon$$

und ein $m_0 \geq N_\varepsilon$ mit

$$a_{m_0} < \underline{\lim} a_n + \varepsilon \ .$$

Also folgt

$$a_{n_0} - a_{m_0} > \overline{\lim} a_n - \varepsilon - \underline{\lim} a_n - \varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon$$

im Widerspruch zu $(*)$.
b) Nun sei (a_n) eine beliebige **komplexe** Folge, und es sei $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ die Normaldarstellung von a_n. Dann sind (α_n) und (β_n) Folgen in $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_n - \alpha_m| \\ |\beta_n - \beta_m| \end{array}\right\} \leq |a_n - a_m| \qquad (n, m \in \mathbb{N}) \ .$$

Also sind (α_n) und (β_n) Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Nach 2. existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_n \to \alpha$ und $\beta_n \to \beta (n \to \infty)$.
Also folgt mit S. 5.5

$$\alpha_n + i\beta_n \to \alpha + i\beta \qquad (n \to \infty) \ .$$

□

Definition 5.20 Es sei (a_n) eine beliebige Folge in Y. Ist (n_k) eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es gilt damit

Satz 5.21 *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.*
2. *Es existiert eine Teilfolge (a_{m_k}) mit $a_{m_k} \to \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.*
3. *Ist (a_{ℓ_k}) eine konvergente Teilfolge von (a_n) so ist*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \le \lim_{n\to\infty} a_{\ell_k} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n .$$

Beweis. 1. Wir definieren (n_k) induktiv. Dazu setzen wir $n_1 := 1$. Sind $n_1, \ldots, n_k$ bereits definiert, so wählen wir ein $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k$ und so, dass

$$|a_{n_{k+1}} - \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n| < 1/(k+1)$$

gilt (existiert nach S. 5.16). Dann gilt $a_{n_k} \to \overline{\lim} a_n$ $(k \to \infty)$.
2. Analog
3. Es sei (a_{ℓ_k}) eine konvergente Teilfolge von (a_n) und $a := \lim_{k\to\infty} a_{\ell_k}$. Ist $\varepsilon > 0$, so existiert ein N_ε mit $a_n < \overline{\lim} a_n + \varepsilon$ $(n \ge N_\varepsilon)$ also auch $a_{\ell_k} \le \overline{\lim} a_n + \varepsilon$ für $k \ge N_\varepsilon$ (beachte: $\ell_k \ge k$). Damit ist auch $a \le \overline{\lim} a_n + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $a \le \overline{\lim} a_n$. Entsprechend sieht man, dass $\underline{\lim} a_n \le a$ gilt. □

Als Konsequenz erhalten wir insbesondere folgenden zentralen Satz

Satz 5.22 *(Bolzano-Weierstraß)*
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann wähle man etwa (n_k) wie in S. 5.21.1.
2. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Ist $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ die Normaldarstellung von a_n, so sind die Folgen (α_n) und (β_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt (es gilt $|\alpha_n| \le |a_n|$ und $|\beta_n| \le |a_n|$). Nach 1. existieren eine Teilfolge (α_{n_k}) von (α_n) und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Da auch $(\gamma_k) := (\beta_{n_k})$ beschränkt ist, existieren wieder

nach 1. eine Teilfolge $(\beta_{n_{k_\ell}}) = (\gamma_{k_\ell})$ von (γ_k) und ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta_{n_{k_\ell}} \to \beta \, (\ell \to \infty)$. Nach S. 5.5 gilt also

$$\alpha_{n_{k_\ell}} + i\beta_{n_{k_\ell}} \to \alpha + i\beta \qquad (\ell \to \infty) .$$

(Man beachte: Konvergiert eine Folge, so konvergiert auch jede Teilfolge, und zwar gegen den gleichen Grenzwert). □

Beispiel 5.23 1. Es sei $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$. Dann gilt

$$a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \qquad \text{und} \qquad a_{2k-1} = -1 - \frac{1}{2k-1} \to -1 .$$

2. Es sei $a_n = q^n$ mit $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$. Dann ist auch $|a_n| = 1$ für alle n. Also hat nach S. 5.22 die geometrische Folge (a_n) eine konvergente Teilfolge. Ist etwa $q = i$, so gilt

$$a_{4k} = 1 \to 1, \quad a_{4k+1} = i \to i, \quad a_{4k+2} = -1 \to -1, \quad a_{4k+3} = -i \to -i .$$

6 Reihen

Wir betrachten wieder die Folge $(q^\nu)_{\nu=0}^\infty$ für ein $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$. Für die Summe der ersten $(n+1)$ Folgelieder gilt nach der geometrischen Summenformel

$$\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} .$$

Wegen $q^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$ folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu \to \frac{1}{1-q} \qquad (n \to \infty) ,$$

die Folge der Summen konvergiert also gegen $\frac{1}{1-q}$. Man verwendet dann kurz das **Symbol** $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ für den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$.

Bemerkung und Definition 6.1 Es sei $(a_\nu)_{\nu=0}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{K}$.
1. Die der Folge (a_ν) zugeordnete Folge $(s_n)_{n=0}^\infty$ der *Partial-* oder *Teilsummen*

$$s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

heißt (*die mit* (a_ν) *gebildete*) *Reihe* und wird mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ bezeichnet. Die a_ν heißen dann *Reihenglieder.*
2. Ist die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (also die Folge (s_n)) konvergent gegen s, so schreiben wir $s =: \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$. Die Zahl s heißt dann der *Reihenwert.*

!!! Man beachte, dass das Symbol $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ also zwei Bedeutungen hat: Erstens steht es für die Folge (s_n) der Teilsummen und zweitens (im Falle der Konvergenz!) für deren Grenzwert.
Dass die Summation bei 0 beginnt ist unwesentlich. Genauso kann man Reihen $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ oder auch $n_0 \in \mathbb{Z}$ betrachten (d. h. die Folge $(s_n = \sum\limits_{\nu=n_0}^{n} a_\nu)_{n=n_0}^\infty$).

Beispiel 6.2 1. Es sei $a_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ $(\nu \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=2}^{n+1} \frac{1}{\nu} = 1 - \frac{1}{n+1} .$$

Also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, d. h. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ ist konvergent mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 .$$

2. Es sei $a_\nu = q^\nu$ für ein $q \in \mathbb{K}$, $|q| < 1$. Dann ist (s. o.) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ konvergent mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1-q} .$$

Diese Reihe heißt *geometrische Reihe*. Speziell ergibt sich etwa für $q = 1/2$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 2$$

oder auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 1 .$$

Für das "Rechnen" mit konvergenten Reihen gilt

Satz 6.3 *Es seien $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$, und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann ist auch $\sum\limits_{\nu=n_0}^{\infty} (\alpha a_\nu + \beta b_\nu)$ konvergent mit*

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty} (\alpha a_\nu + \beta b_\nu) = \alpha \sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu + \beta \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu .$$

Beweis. Ergibt sich leicht durch Anwendung von S. 5.5. □

Damit gilt etwa

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^\nu + 4}{5^\nu} &= 2 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{3^\nu}{5^\nu} + 4 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{5^\nu} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1-3/5} + 4 \cdot \frac{1}{1-1/5} = 10 . \end{aligned}$$

Durch Übertragung des Cauchy'schen Konvergenzkriteriums für Folgen ergibt sich unmittelbar

Satz 6.4 *Es sei $(a_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.*

1. *(Cauchy-Kriterium für Reihen)*
   Genau dann ist die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \right| < \varepsilon \qquad (n > m \geq N_\varepsilon) .$$

2. *Ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *konvergent, so gilt stets*

$$a_n \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) ,$$

d. h. notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist die Bedingung, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden.

Beweis. 1. Ist $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$, so ist (s_n) (und damit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$) nach S. 5.19 genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \qquad (n, m \geq N_\varepsilon)$$

Dabei kann ohne Einschränkung $n > m$ vorausgesetzt werden. Mit

$$s_n - s_m = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu - \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu = \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu$$

ergibt sich die Behauptung.
2. Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent, so folgt aus 1. insbesondere: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| = \left| \sum_{\nu=n}^{n} a_\nu \right| < \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon)$$

(wähle $m = n - 1$). Also gilt $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$. □

Beispiel 6.5 Es sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$. Dann ist auch $|q^n| \geq 1$ für alle n. Also ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ nach S. 6.4 divergent. Insbesondere divergiert also etwa $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 1$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu$ oder auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} i^\nu$.

Für Reihen mit **nichtnegativen Gliedern** a_ν gilt folgendes sehr einfache Kriterium

Bemerkung 6.6 Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ eine Reihe mit $a_\nu \geq 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

1. Ist die Folge (s_n) der Teilsummen beschränkt, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent.

2. Ist die Folge (s_n) der Teilsummen unbeschränkt, so gilt $s_n \to \infty$ (und insbesondere ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ divergent).

(Denn: Für die Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ gilt

$$s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Also ist (s_n) monoton wachsend.
Also ergeben beide Aussagen sich unmittelbar aus dem Hauptsatz über monotone Folgen.)
Man schreibt (**nur für** $a_\nu \geq 0$) auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$ im Fall 1. und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \infty$ im Fall 2.

Beispiel 6.7 1. (Harmonische Reihen) Es sei $p \in \mathbb{N}, p > 1$. Dann ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^p}$ konvergent.
Denn: Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ (vgl. B. 6.2)

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^p} \leq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2} \leq 1 + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{\nu(\nu-1)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2 .$$

Also ist die Teilsummenfolge (s_n) beschränkt. Nach S. 6.6 ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^p}$ konvergent (und es gilt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^p} \leq 2$).
Viel schwieriger ist die Frage nach dem Reihenwert $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^p}$ zu beantworten. Man kann zeigen (etwa mit Methoden der "Fourier-Analysis")

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6} , \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$

2. (DIE harmonische Reihe) Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ist divergent.
[Dies zeigt insbesondere, dass die Bedingung "$a_n \to 0$" nicht hinreichend für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist!!!]
(Denn: Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} s_{2^j} = \sum_{\nu=1}^{2^j} \frac{1}{\nu} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j} \geq 1 + \frac{j}{2} . \end{aligned}$$

Also ist (s_n) unbeschränkt.)

Satz 6.8 *(Cauchy'scher Verdichtungssatz)*
Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0$. Dann konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Beweis. Wir setzen
$$s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \qquad \text{und} \quad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \ .$$
Dann sind (s_n) und (σ_n) monoton wachsend.
1. Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent. Dann ist die Folge (σ_n) beschränkt. Da (a_ν) monoton fallend ist, ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu &\leq \sum_{\nu=1}^{2^{n+1}-1} a_\nu \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\leq 2^0 a_1 + 2^1 \cdot a_2 + 2^2 \cdot a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} = \sigma_n \ . \end{aligned}$$
Also ist auch (s_n) beschränkt.
2. Es sei $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergent. Dann ist (s_n) beschränkt. Da (a_ν) monoton fallend ist, ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} = 2^0 a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + 2^3 a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\ &= 2\left\{\frac{1}{2} a_1 + 2^0 a_2 + 2^1 a_4 + 2^2 a_8 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n}\right\} \\ &\leq 2\left\{a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})\right\} \\ &= 2\sum_{\nu=1}^{2^n} a_\nu = 2 s_{2^n} \ . \end{aligned}$$
Also ist auch (σ_n) beschränkt und folglich $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent. □

Beispiel 6.9 Es sei $p \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \sqrt[p]{\nu}}$ konvergent.
(Denn: Die Folge $a_\nu = \frac{1}{\nu \sqrt[p]{\nu}}$ ist monoton fallend und ≥ 0. Nach S. 6.8 konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ genau dann, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert. Es gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k/(2^k \sqrt[p]{2^k}) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/\sqrt[p]{2})^k$$
und diese geometrische Reihe konvergiert, da $1/\sqrt[p]{2} < 1$ ist.)

Ein weiteres klassisches Konvergenzkriterium gilt für so genannte "alternierende Reihen":

Satz 6.10 *(Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen)*
Es sei (a_n) *eine monotone fallende Folge (nichtnegativer) Zahlen* a_n *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$.

Beweis. Zunächst gilt für alle $n \geq 2$

$$s_n - s_{n-2} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu a_\nu = (-1)^n \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{\leq 0},$$

d. h. die Teilfolge (s_{2j}) ist monoton fallend und die Teilfolge (s_{2j+1}) ist monoton wachsend. Weiter gilt

$$s_{2j} = \sum_{\nu=0}^{2j} (-1)^\nu a_\nu = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2j-2} - a_{2j-1})}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2j}}_{\geq 0} \geq 0 .$$

Folglich ist (s_{2j}) nach dem Hauptsatz über monotone Folgen konvergent. Ist $s := \lim\limits_{j\to\infty} s_{2j}$, so gilt auch

$$s_{2j+1} = s_{2j} - \underbrace{a_{2j+1}}_{\to 0} \to s \quad (j \to \infty) .$$

Hieraus folgt auch $s_n \to s$ für $n \to \infty$ ([Ü]). □

Beispiel 6.11 (alternierende harmonische Reihe)
Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu/\nu$ konvergiert nach S. 6.10 (denn: $a_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$).
Während also $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ (nach B. 6.5.2) divergiert, führt das “Anbringen” abwechselnder Vorzeichen zur Konvergenz. Wir untersuchen nun Reihen, bei denen dieser Unterschied nicht auftritt.

Definition 6.12 Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ eine Reihe in $\mathbb{K}$. Dann heißt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *absolut konvergent*, falls $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ konvergent ist. Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ divergent, so heißt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *bedingt konvergent*.

Beispiel 6.13 1. Wie oben gesehen, ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ bedingt konvergent.

2. Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^p}$ ist für jedes feste $p \in \mathbb{N}$ mit $p > 1$ absolut konvergent (vgl. B. 6.7).

Aus dem Cauchy-Kriterium ergibt sich leicht

Satz 6.14 *Ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *absolut konvergent, so ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *auch konvergent.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} |a_\nu| < \varepsilon \quad (n > m \geq N_\varepsilon) \ .$$

(S. 6.4.1). Also gilt auch

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \right| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} |a_\nu| < \varepsilon \quad (n > m \geq N_\varepsilon) \ .$$

Nach S. 6.4.1 ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent. □

Eines der wichtigsten Kriterien für (absolute) Konvergenz ist

Satz 6.15 *(Majorantenkriterium)*
Es sei (a_ν) *eine Folge in* $\mathbb{K}$ *und es sei* (b_ν) *eine Folge in* $[0, \infty)$ *mit* $|a_\nu| \leq b_\nu$ *für fast alle* $\nu \in \mathbb{N}$. *Ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ *konvergent, so ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *absolut konvergent. (Die Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ *heißt "Majorante" von* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$*.)*

Beweis. Da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergent ist, existiert ein $M > 0$ mit

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Weiter existiert ein N mit $|a_\nu| \leq b_\nu$ $(\nu \geq N)$. Also gilt für alle $n \geq N$

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| = \sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu| + \sum_{\nu=N}^{n} |a_\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu| + \sum_{\nu=N}^{n} b_\nu \leq \sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu| + M \ .$$

Damit ist $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \right)_n$ beschränkt, d. h. $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist absolut konvergent nach S. 6.6. □

Beispiel 6.16 1. Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ mit $a_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{\nu^2-3\nu}{4\nu^4+5}$.
Dann gilt (für $\nu > 1$)

$$\left|(-1)^\nu \frac{\nu^2-3\nu}{4\nu^4+5}\right| \nu^2 = \frac{1-3/\nu}{4+5/\nu^4} \to \frac{1}{4} \quad (\nu \to \infty) .$$

Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_\nu| \le \frac{1}{\nu^2} \qquad (\nu \ge N) .$$

Folglich ist die Reihe nach S. 6.15 und B. 6.7 konvergent .
2. Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ mit $b_\nu = \frac{\nu^2+3\nu}{4\nu^3+5}$ ist divergent. Denn: Angenommen, die Reihe wäre konvergent. Da

$$\frac{\nu^2+3\nu}{4\nu^3+5} \cdot \nu \to \frac{1}{4} \quad (\nu \to \infty)$$

gilt, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$b_\nu \ge \frac{1}{5\nu} \qquad (\nu \ge N) .$$

Dann wäre auch $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{5\nu}$ konvergent nach S. 6.15. Dies ist aber nicht der Fall. (Man nennt $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{5\nu}$ eine “divergente Minorante” von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$.)

Durch Anwendung von S. 6.15 auf die konvergente Majorante $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ für geeignetes $0 < q < 1$ ergibt sich:

Satz 6.17 *(Wurzelkriterium)*
Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$ und es sei

$$a := \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$$

(wobei $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} c_\nu =: \infty$ für unbeschränkte Folgen (c_ν) in $[0,\infty)$ gesetzt wird).
Dann gilt
1. Ist $a < 1$, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent.
2. Ist $a > 1$ (wobei $\infty > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$), so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ divergent.

Beweis. 1. Ist $a < 1$, so existiert zu $q := (1+a)/2 (< 1)$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le q$ (und damit auch $|a_\nu| \le q^\nu$) für alle $\nu \ge N$. Da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ konvergiert, ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent nach S. 6.15.

2. Ist $a > 1$, so ist $\sqrt[\nu]{|a_\nu|} > 1$ (und damit auch $|a_\nu| > 1$) für ∞ viele $\nu \in \mathbb{N}_0$. Also ist (a_ν) sicher nicht konvergent gegen 0. Nach S. 6.4 ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ divergent. □

Beispiel 6.18 1. Es sei $a_\nu = \nu^p q^\nu$ für ein festes $p \in \mathbb{N}$ und ein festes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt, da $\sqrt[\nu]{\nu} \to 1$ für $\nu \to \infty$ ([Ü]),

$$\sqrt[\nu]{\nu^p |q|^\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^p |q| \to |q| \qquad (\nu \to \infty) .$$

Also gilt

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = |q| < 1 .$$

Nach S. 6.17 ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \nu^p q^\nu$ absolut konvergent. (Insbesondere ergibt sich mit S. 6.4 auch $\nu^p q^\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$.)

2. Es sei $a_\nu = \frac{1}{\nu^p}$ für ein festes $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \left(\frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}}\right)^p \to 1 \quad (\nu \to \infty) ,$$

d. h. es ist $a = 1$ in S. 6.17. Wie oben gesehen ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu$ divergent und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^p}$ für $p > 1$ (absolut) konvergent. Also lässt sich im Fall $a = 1$ i. A. keine Aussage machen.

Satz 6.19 *(Quotientenkriterium)*
Es sei (a_ν) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_\nu \neq 0$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

1. $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$
2. *Ist* $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| < 1$, *so ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *absolut konvergent.*

Beweis. 1. Es sei $a := \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \leq a + \varepsilon \qquad (\nu \geq N) .$$

Für $\nu > N$ gilt dann

$$|a_\nu| = \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{\nu-1}}{a_{\nu-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| |a_N| \leq (a+\varepsilon)^{\nu-N} |a_N| = \frac{|a_N|}{(a+\varepsilon)^N} \cdot (a+\varepsilon)^\nu$$

also

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq (a+\varepsilon) \sqrt[\nu]{\frac{|a_N|}{(a+\varepsilon)^N}} \longrightarrow a + \varepsilon \qquad (\nu \to \infty)$$

und damit

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le a + \varepsilon \, .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.
2. Nach dem Wurzelkriterium (S. 6.17) und 1. ist $\sum a_\nu$ absolut konvergent. □

Beispiel 6.20 Wir betrachten $a_\nu := \frac{z^\nu}{\nu!}$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$, wobei $z \in \mathbb{C}$ fest ist. Dann gilt (für $z \neq 0$)

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \frac{|z|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\frac{\nu!}{|z|^\nu} = \frac{|z|}{\nu+1} \to 0 \quad (\nu \to \infty)\, .$$

Damit liefert das Quotientenkriterium die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (und für $z = 0$ ist die Reihe trivialerweise konvergent).

Wir wollen uns jetzt noch (kurz) mit der Multiplikation von Reihen beschäftigen. Dazu orientieren wir uns zunächst an der Multiplikation von Summen: Es sei

$$A := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, , \qquad B = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu \, .$$

Dann ist

$$AB = \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu\right) = \sum_{\substack{0\le\nu\le n\\ 0\le\mu\le m}} a_\nu b_\mu$$

wobei die Reihenfolge der Summation beliebig ist. Entsprechend sollte beim Produkt $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\right)\left(\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} b_\mu\right)$ jeder der Summanden $a_\nu b_\mu\,(\nu \in \mathbb{N}_0, \mu \in \mathbb{N}_0)$ einmal auftauchen. Anders als bei endlichen Summen spielt dabei jedoch die "Reihenfolge" der Summation i. A. eine Rolle. Eine mögliche Anordnung ist die folgende

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 & & a_0b_3 & & a_0b_4 \\
 & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & \\
a_1b_0 & & a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & \dots \\
 & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & & \\
a_2b_0 & & a_2b_1 & & a_2b_2 & & \dots & & \dots \\
 & \overset{+}{\swarrow} & & \overset{+}{\swarrow} & & & & & \\
a_3b_0 & & a_3b_1 & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & \overset{+}{\swarrow} & & & & & & & \\
a_4b_0 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

d. h. wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} \qquad (n \in \mathbb{N}_0) .$$

Die c_n stellen also gerade die Summe der Produkte in der n-ten Diagonale dar.

Definition 6.21 Es seien $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ Reihen in $\mathbb{K}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} \right) \left[= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} b_\nu \right) \right]$$

Cauchysche Produktreihe oder kurz *Cauchy-Produkt* von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$.

Es gilt damit

Satz 6.22 *Es seien $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$. Ist eine der beiden Reihen absolut konvergent, so konvergiert die Cauchysche Produktreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \right) .$$

Beweis. 1. O. E. sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ konvergent. Es sei $B_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} b_\nu$ und $A := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $B := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + \ldots + a_n b_0) \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 \\
&= a_0 (B_n - B) + a_1 (B_{n-1} - B) + \ldots + a_n (B_0 - B) + B \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu .
\end{aligned}$$

Wegen $B \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \to A \cdot B$ $(n \to \infty)$ reicht es also zu zeigen

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} (B_\nu - B) \to 0 \qquad (n \to \infty) . \tag{6.2}$$

2. Wir zeigen allgemeiner: Es seien $c_{n\nu} \in \mathbb{K}$ $(\nu = 0, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}_0)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle festen $\nu \in \mathbb{N}_0$ konvergiert die Folge $(c_{n\nu})_{n=\nu}^{\infty}$ gegen 0.

(ii) Die Folge $\left(\sum_{\nu=0}^{n} |c_{n\nu}|\right)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt.

Dann gilt: Ist (d_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $d_n \to 0$ für $n \to \infty$, so folgt auch

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} d_\nu \to 0 \qquad (n \to \infty) .$$

Denn: Es seien $M, m > 0$ so, dass $|d_n| \leq m$ und $\sum_{\nu=0}^{n} |c_{n\nu}| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|d_n| < \varepsilon\,(n \geq N)$. Damit ergibt sich für $n \geq N$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} d_\nu\right| \leq \sum_{\nu=0}^{N-1} |c_{n\nu}| \underbrace{|d_\nu|}_{\leq m} + \sum_{\nu=N}^{n} |c_{n\nu}| \underbrace{|d_\nu|}_{\leq \varepsilon} \leq m \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} |c_{n\nu}| + \varepsilon \cdot M .$$

Nach Voraussetzung gilt $c_{n\nu} \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle festen $\nu = 0, \dots, N-1$, also auch $\sum_{\nu=0}^{N-1} |c_{n\nu}| \to 0$ $(n \to \infty)$. Folglich existiert ein $N'_\varepsilon \geq N$ so, dass

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} |c_{n\nu}| < \varepsilon \qquad (n \geq N'_\varepsilon) .$$

Also gilt insgesamt

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} d_\nu\right| < \varepsilon(m + M) \qquad (n \geq N'_\varepsilon) .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt die Behauptung.

3. Es sei $c_{n\nu} := a_{n-\nu}$ für $\nu = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} |c_{n\nu}| = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n-\nu}| = \sum_{\mu=0}^{n} |a_\mu| \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} |a_\mu| \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

also ist (ii) aus 2. erfüllt. Außerdem gilt nach S. 6.4 $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und damit auch $c_{n\nu} = a_{n-\nu} \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle ν, d. h. (i) aus 2. ist ebenfalls erfüllt. Da $d_\nu := B_\nu - B \to 0$ gilt, ergibt sich (6.2) nach 2. □

Beispiel 6.23 Für $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ betrachten wir die (absolut) konvergenten geometrischen Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = \frac{1}{1-z} .$$

Dann ist die Cauchysche Produktreihe gegeben durch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} z^\nu z^{n-\nu} = z^n \sum_{\nu=0}^{n} 1 = (n+1)z^n \ .$$

Nach S. 6.22 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{1}{(1-z)^2} \ .$$

Beispiel 6.24 Wir betrachen $a_\nu = b_\nu = (-1)^\nu/\sqrt{\nu+1}$. Dann ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergent nach dem Leibnizkriterium. Für die Cauchysche Produktreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ gilt

$$c_n = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu+1}\sqrt{n-\nu+1}} \ ,$$

also

$$|c_n| \geq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1 \ .$$

Also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent nach S. 6.4.2. Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass auf die Voraussetzung der absoluten Konvergenz einer der beiden Reihen in S. 6.22 nicht verzichtet werden kann!

7 Normierte und metrische Räume

Wie wir bereits in den vorhergehenden Abschnitten gesehen haben, besteht ein zentrales Anliegen der Analysis darin, "Grenzwerte" zu untersuchen. Grob gesagt bedeutet "$x_n \to x$", dass x_n für große n "nahe bei" x liegt. Es ist also wesentlich, "Abstände" zwischen Elementen einer Menge bestimmen zu können. Eine Klasse von Räumen mit dieser Eigenschaft wollen wir in diesem Abschnitt definieren, die sog. metrischen Räume. Es wird sich später zeigen, dass diese Räume für viele Fragen der Analysis den geeigneten Rahmen bilden.
Wir betrachten zunächst jedoch eine speziellere Klasse von Räumen, wobei wir damit gleichzeitig erstmals eine Verbindung zur Linearen Algebra herstellen.

Definition 7.1 Es sei $V = (V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* (auf V), falls folgende Bedingungen erfüllt sind

(N.1) (Definitheit)
$||0|| = 0$ und $||x|| > 0$ für alle $x \neq 0$.

(N.2) (Homogenität)
Für alle $x \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

(N.3) (Dreiecksungleichung)
Für alle $x, y \in V$ gilt $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Wir nennen dann $(V, ||\cdot||)$ einen *normierten* Raum.

Beispiel 7.2 1. Ist $|\cdot|$ der Betrag in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, so ist $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ (als Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$)
2. Es sei

$$\mathbb{R}^m := \{(x_1, \ldots, x_m) : x_j \in \mathbb{R} \ \text{ für } j = 1, \ldots, m\}$$

und

$$\mathbb{C}^m := \{(z_1, \ldots, z_m) : z_j \in \mathbb{C} \ \text{ für } j = 1, \ldots, m\}$$

(mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation; vgl. Lineare Algebra). Wir schreiben in Zukunft auch kurz $\mathbb{K}^m$ für $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{C}^m$. Dann sind durch

$$\begin{aligned} ||x||_1 &:= \sum_{j=1}^{m} |x_j| \\ ||x||_2 &:= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2} \\ ||x||_\infty &:= \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, m\} \ , \end{aligned}$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, Normen auf $\mathbb{K}^m$ gegeben.

(Beweis: [Ü]. Aus der Linearen Algebra sollte dabei die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung übernommen werden)
Die obige Norm $||\cdot||_2$ heißt (für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) *euklidsche Norm.* Wir schreiben für $||\cdot||_2$ auch kurz $|\cdot|$.
Ist etwa $m=3$ und $x=(1,3-2)$, so gilt

$$|x| = ||x||_2 = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

und

$$||x||_1 = 1+3+2 = 6\ , \qquad ||x||_\infty = \max(1,3,2) = 3$$

Definition 7.3 Es sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Eine Menge $W \subset V$ heißt *beschränkt*, falls ein $C>0$ existiert mit $||x|| \leq C$ für alle $x \in W$. Ist M eine Menge, so heißt $f: M \to V$ *beschränkt*, falls $f(M) \subset V$ beschränkt ist.

Beispiel 7.4 Es sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann ist

$$S := \{x \in V : ||x|| = 1\}$$

(die sog. Einheitssphäre in V) beschränkt.

Bemerkung und Definition 7.5 1. Es sei E ein Vektorraum (über $\mathbb{K}$). Ist M eine nichtleere Menge, so sind für $f,g: M \to E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Funktionen $f+g: M \to E$ und $\lambda f: M \to E$ definert durch

$$(f+g)(t) := f(t)+g(t), \quad (\lambda f)(t) := \lambda \cdot f(t) \quad (t \in M)\ .$$

Damit ist auch $E^M := \{f : M \to E\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ (siehe Lineare Algebra).
2. Es sei nun $(E, |\cdot|_E)$ ein normierter Räum. Wir setzen

$$B(M,E) := \{f : M \to E : f \text{ beschränkt}\}\ .$$

$B(M,E)$ ist ein Unterraum von E^M und damit selbst ein Vektorraum ([Ü]).
Weiter definieren wir für $f,g \in B(M,E)$

$$||f||_\infty := \sup\{|f(t)|_E : t \in M\}$$

Dann ist $||\cdot||_\infty$ eine Norm auf $B(M,E)$ ([Ü]).

Definition 7.6 Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik (auf X)*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(d.1) (Definitheit)
$d(x,x) = 0$ für alle $x \in X$ und $d(x,y) > 0$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$.
(d.2) (Symmetrie)
Für alle $x, y \in X$ ist $d(x,y) = d(y,x)$.
(d.3) (Dreiecksungleichung)
Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Das Paar (X, d) heißt dann *metrischer Raum*.

Bemerkung 7.7 1. Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $Y \subset X$, so ist auch (Y, d) (d.h. genauer $(Y, d_{|Y \times Y})$) ein metrischer Räum.
2. Es sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Dann ist durch

$$d(x,y) := \delta(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x = y \\ 1, & \text{falls} \quad x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X gegeben (die sog. diskrete Metrik). Dies ergibt sich leicht durch Überprüfen von (d.1)–(d.3).

Satz 7.8 *Ist* $(V, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum, so ist durch*

$$d(x,y) := d_{||\cdot||}(x,y) := ||x - y|| \qquad (x, y \in V)$$

eine Metrik auf V *gegeben.*

Beweis. (d.1) ergibt sich unmittelbar aus (N.1).
Zu (d.2): Sind $x, y \in V$, so gilt

$$d(x,y) = ||x - y|| = ||-(y - x)|| \overset{(N.2)}{=} ||y - x|| = d(y,x) \; .$$

Zu (d.3): Sind $x, y, z \in V$, so gilt

$$d(x,y) = ||x - y|| = ||x - z + z - y|| \overset{(N.3)}{\leq} ||x - z|| + ||z - y|| = d(x,z) + d(z,y)$$

□

Beispiel 7.9 Es sei $V = \mathbb{K}^m$. Dann ist nach S. 7.8 durch

$$d(x,y) := d_{|\cdot|}(x,y) := d_{||\cdot||_2}(x,y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{K}^m)$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}^m$ gegeben (die sog. *euklidsche Metrik*).
Falls nichts anderes angegeben ist, soll im weiteren Verlauf der Vorlesung $\mathbb{K}^m$ stets mit der Norm $|\cdot| = ||\cdot||_2$ und der Metrik $d_{|\cdot|} = d_{||\cdot||_2}$ versehen sein.

Wir untersuchen nun Folgen in metrischen Räumen

Definition 7.10 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei (x_n) eine Folge in X. Ferner sei $x \in X$. Die Folge (x_n) heißt *konvergent* (in (X, d)) gegen (den *Grenzwert*) x, falls gilt

$$d(x_n, x) \to 0 \qquad (n \to \infty) ,$$

d. h. falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_n, x) < \varepsilon \qquad (n \geq N_\varepsilon) .$$

Wir schreiben wieder

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{oder} \quad x_n \to x \quad (n \to \infty) .$$

Beispiel 7.11 Es sei $X = \mathbb{R}$ und $(x_n) = (1/n)$. Dann gilt $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ aber (x_n) konvergiert **nicht** im metrischen Raum $(\mathbb{R}, \delta)$, wobei δ die diskrete Metrik ist. (Dort gilt: Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n_0 = n_0(x)$ so, dass $\delta(x_n, x) = 1$ für alle $n \geq n_0$.)
Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass die Konvergenz einer Folge von der zu Grunde liegenden Metrik abhängen kann!

Wie im Fall $(X, d) = (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$ gilt

Satz 7.12 *Jede Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X, d) hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Es seien $x, \tilde{x}$ Grenzwerte von (x_n). Dann gilt mit (d.3)

$$d(x, \tilde{x}) \leq d(x, x_n) + d(x_n, \tilde{x}) \to 0 \qquad (n \to \infty) ,$$

also ist $d(x, \tilde{x}) = 0$. Aufgrund von (d.1) ist $x = \tilde{x}$. □

Bemerkung 7.13 Es sei $(X, d) = (\mathbb{K}^m, d_{||\cdot||_2})$, also

$$d_{||\cdot||_2}(x, y) = ||x - y||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|^2} \qquad (x, y \in \mathbb{K}^m)$$

Ferner sei $(x^{(n)})$ eine Folge in $\mathbb{K}^m$ und

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(d. h. $x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ sind die Koordinaten von $x^{(n)}$). Ist $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$$

(d. h. $||x^{(n)} - x||_2 \to 0$ $(n \to \infty)$) genau dann, wenn für die "Koordinatenfolgen" $(x_j^{(n)})_n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_j^{(n)} = x_j \qquad (j = 1, \ldots, m)\,.$$

(Denn:
"$\Rightarrow$:" Gilt $x^{(n)} \to x$ $(n \to \infty)$, so ergibt sich für $j = 1, \ldots, m$

$$|x_j^{(n)} - x_j| \le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu^{(n)} - x_\nu|^2} = ||x^{(n)} - x||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

also

$$x_j^{(n)} \to x_j \qquad (n \to \infty)\ .$$

"$\Leftarrow$:" Es gelte nun $x_j^{(n)} \to x_j$ $(n \to \infty)$ für $j = 1, \ldots, m$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existieren $N_\varepsilon^{(j)} \in \mathbb{N}$ für $j = 1, \ldots, m$ mit

$$|x_j^{(n)} - x_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \qquad \left(n \ge N_\varepsilon^{(j)}\right)\ .$$

Also gilt für $n \ge \max\left(N_\varepsilon^{(1)}, \ldots, N_\varepsilon^{(m)}\right)$:

$$||x^{(n)} - x||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j^{(n)} - x_j|^2} \le \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon\ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $d(x^{(n)}, x) = ||x^{(n)} - x||_2 \to 0$, d. h. $x^{(n)} \to x$ $(n \to \infty)$.)

Beispiel 7.14 Es sei $m = 3$ und

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}\,,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\ ,\ 1 - \frac{1}{2n}\right) = (x_1^{(n)}\ ,\ x_2^{(n)}\ ,\ x_3^{(n)})\ .$$

Dann gilt

$$x_1^{(n)} \to 0\,, \quad x_2^{(n)} \to e\,, \quad x_3^{(n)} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

also folgt mit B. 7.13

$$||x^{(n)} - (0, e, 1)||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)\ ,$$

d. h.

$$x^{(n)} \to (0, e, 1) \qquad (n \to \infty)\ .$$

In Verallgemeinerung von S. 5.22 erhalten wir

Satz 7.15 *(Bolzano-Weierstraß für Folgen in $\mathbb{K}^m$)*
Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^m$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. (Per Induktion nach m)
1. Induktionsanfang $m = 1$: Ergibt sich aus S. 5.22.
2. Induktionsschritt $m \to m + 1$: Es sei $(x^{(n)})$ eine Folge in $\mathbb{K}^{m+1}$ und

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)}) \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Dann ist $(y^{(n)})$ mit

$$y^{(n)} := (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

eine Folge in $\mathbb{K}^m$ und es gilt

$$||y^{(n)}||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j^{(n)}|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m+1} |x_j^{(n)}|^2} = ||x^{(n)}||_2$$

d. h. $(y^{(n)})$ ist beschränkt. Nach Induktionsveraussetzung existiert eine Teilfolge $(y^{(n_k)})$ mit

$$y^{(n_k)} \to y \qquad (k \to \infty)$$

für ein $y \in \mathbb{K}^m$.
Ist $z_k := x_{m+1}^{(n_k)}$, so ist $|z_k| \leq ||x^{(n_k)}||$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also ist (z_k) beschränkt in $\mathbb{K}$. Nach S. 5.22 existieren eine Teilfolge $(z_{k_\ell})_\ell$ von $(z_k)_k$ und ein $z \in \mathbb{K}$ mit

$$x_{m+1}^{(n_{k_\ell})} = z_{k_\ell} \to z \qquad (\ell \to \infty) \ .$$

Ist $y = (y_1, \ldots, y_m)$, so folgt aus $y^{(n_{k_\ell})} \to y$ $(\ell \to \infty)$ und B. 7.13

$$x_1^{(n_{k_\ell})} \to y_1 \ , \quad x_2^{(n_{k_\ell})} \to y_2, \ldots, \quad x_m^{(n_{k_\ell})} \to y_m \qquad (\ell \to \infty) \ .$$

Also gilt wieder mit B. 7.13

$$x^{(n_{k_\ell})} = \left(x_1^{(n_{k_\ell})}, \ldots, x_m^{(n_{k_\ell})}, x_{m+1}^{(n_{k_\ell})}\right) \to (y_1 \ldots, y_m, z)$$

für $\ell \to \infty$. □

Definition 7.16 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$.

1. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von M, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in M$ mit $y \neq x$ und $d(x, y) < \varepsilon$ existiert.

2. Wir setzen
$$H(M) := \{x \in X : x \text{ Häufungspunkt von } M\} .$$

Bemerkung 7.17 Aus der Definition ergibt sich leicht: x ist genau dann Häufungspunkt von M, wenn eine Folge (x_n) in M existiert mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ und $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ([Ü]).

Beispiel 7.18 1. Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Für $M = \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$ gilt
$$H(M) = \{0\}$$
und für $M = \mathbb{Q}$ gilt (vgl. B. A.11)
$$H(M) = \mathbb{R}$$
2. Es sei $(X, d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$. Für $M = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ gilt
$$H(M) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} .$$

Durch Übertragung des Satzes von Bolzano-Weierstraß für Folgen ergibt sich

Satz 7.19 *(Bolzano-Weierstraß für Mengen in $\mathbb{K}^m$)*
Es sei $M \subset \mathbb{K}^m$ beschränkt und unendlich. Dann ist
$$H(M) \neq \emptyset .$$

Beweis. Da M unendlich ist, existiert eine Folge (x_n) in M mit $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$. Aus der Beschränktheit von M folgt die Beschränktheit von (x_n). Also besitzt (x_n) nach S. 7.15 eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Ist $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, so ist also $x \in H(M)$ (man beachte: $x_{n_k} \neq x$ für alle k bis auf höchstens eine Ausnahme). □

Ähnlich wie wir die Definition der Folgenkonvergenz in allgemeinen metrischen Räumen auf die Definition in $\mathbb{R}$ zurückgeführt haben, gehen wir jetzt bei der Einführung von Cauchy-Folgen vor.

Definition 7.20 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt *Cauchy-Folge* (in (X, d)), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit
$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (n, m \geq N_\varepsilon) .$$

Bemerkung 7.21 Ist (X, d) ein metrischer Raum, und ist (x_n) eine Folge in X, so gilt wie im Fall $(X, d) = (\mathbb{K}, d_{|.|})$: Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Der Beweis folgt unmittelbar mit der Dreiecksungleichung.
Die Umkehrung ist allerdings im Allgemeinen falsch!
Betrachtet man etwa $(X, d) = (\mathbb{Q}, d_{|.|})$ (also die rationalen Zahlen mit der Betragsmetrik), so ist die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $x_0 = 2$ und

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

eine Folge in $X = \mathbb{Q}$. Betrachtet man (x_n) als Folge in $(\mathbb{R}, d_{|.|})$, so gilt $x_n \to \sqrt{2}$ (vgl. B. 5.14), also ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ und damit auch in $(\mathbb{Q}, d_{|.|})$. Da jedoch $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist, kann die Folge in $(\mathbb{Q}, d_{|.|})$ nicht konvergent sein. (Die Konvergenz in $(\mathbb{Q}, d_{|.|})$ würde auch die Konvergenz in $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ implizieren, d. h., ein rationaler Grenzwert würde der Eindeutigkeit des Grenzwertes (B. 5.2) widersprechen.)

Definition 7.22 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. (X, d) heißt *(folgen-) vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert.

Beispiel 7.23 1. Nach S. 5.19 sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (mit der Metrik $d_{|.|}$) vollständig. Dasselbe gilt für $(\mathbb{K}^m, d_{|.|})$ für beliebige $m \in \mathbb{N}$.
(Denn: Ist $(x^{(n)})$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{K}^m, d_{|.|})$, so gilt mit $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$:

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| \leq ||x^{(n)} - x^{(m)}||_2 \qquad (n, m \in \mathbb{N}) ,$$

also sind auch die Folgen $(x_j^{(n)})_n$ für $j = 1, \ldots, m$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{K}$. Da $(\mathbb{K}, d_{|.|})$ vollständig ist, sind diese konvergent und damit ist nach B. 7.13 auch $(x^{(n)})$ konvergent in $(\mathbb{K}^m, d_{|.|})$.)

2. Nach B. 7.21 ist $(\mathbb{Q}, d_{|.|})$ nicht vollständig.

3. Auf $\mathbb{R}$ ist durch

$$d(x, y) := \left|\frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|}\right| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

eine Metrik definiert ([Ü]).
Die Folge (x_n) mit $x_n = n$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$, die nicht konvergiert.
(Denn: Es gilt für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{n}{1 + n} - \frac{m}{1 + m}\right| = \frac{n - m}{(1 + n)(1 + m)} \leq \frac{n}{1 + n} \cdot \frac{1}{1 + m} \leq \frac{1}{1 + m} .$$

Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N_\varepsilon$, d. h. (x_n) ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$. Ist jedoch $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt

$$d(n,x) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{x}{1+|x|} \right| \to 1 - \frac{x}{1+|x|} > 0$$

also $d(n,x) \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Damit ist (x_n) nicht konvergent und folglich $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig. Es zeigt sich (mit 1.), dass die Vollständigkeit eine Eigenschaft ist, die nicht nur von der zugrunde liegenden Menge (hier $\mathbb{R}$), sondern auch von der Metrik abhängt!

Definition 7.24 Es sei $V = (V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann heißt V *Banachraum*, falls $(V, d_{||\cdot||})$ vollständig ist.

Beispiel 7.25 $\mathbb{K}^m = (\mathbb{K}^m, d_{|\cdot|})$ ist nach B. 7.23.1 ein Banachraum.

8 Stetige Funktionen zwischen metrischen Räumen

Es seien $X = (X, d)$ und $Y = (Y, e)$ metrische Räume. Wir untersuchen jetzt Funktionen $f : M \to Y$, wobei $M \subset X$.
Wir wollen zunächst kurz darauf eingehen wie man in einfachen Fällen solche Funktionen veranschaulichen kann. Dazu setzen wir

$$S_f := \mathrm{graph}(f) := \{(x, y) : x \in M,\, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset X \times Y\ .$$

S_f heißt *Graph* von f.

Beispiel 8.1 1. Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)\ .$$

Dann ist $S_f = \{(x, \sqrt{x}) : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := [x]$, wobei $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ (sog. Gaußklammer von x). Dann ist

$$S_f = \{(x, [x]) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2\ .$$

3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \sin(x_1 x_2) \qquad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)\ .$$

Dann ist

$$S_f = \{(x_1, x_2, \sin(x_1 x_2)) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3\ .$$

4. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(t) := (\cos(t), \sin(t)) \qquad (t \in \mathbb{R})\ .$$

Dann ist

$$S_f = \{(t, \cos(t), \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3\ .$$

Eine der wichtigsten Struktureigenschaften von Funktionen (zwischen metrischen Räumen) ist die Stetigkeit:

Definition 8.2 Es seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, und es sei $f : M \to Y$, wobei $M \subset X$.
1. f heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in M$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon (= \delta_{\varepsilon, x_0}) > 0$ existiert mit

$$e(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M \text{ mit } d(x, x_0) < \delta_\varepsilon\ .$$

2. f heißt *stetig auf der Menge* $M_0 \subset M$, falls f stetig an jeder Stelle $x_0 \in M_0$ ist. Ist $M_0 = M$, so heißt f kurz *stetig.*

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit an einer Stelle x_0, dass die Funktionswerte $f(x)$ für x "nahe bei x_0" auch "nahe bei $f(x_0)$" liegen.

Beispiel 8.3 1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $f : X \to X$ definiert durch $f(x) := x$ $(x \in X)$ (d. h. $f = \mathrm{id}_X$). Dann ist f stetig (auf X).
(Denn: Ist $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$, so gilt für $\delta_\varepsilon := \varepsilon$:

$$d(f(x), f(x)) = d(x, x_0) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d(x, x_0) < \delta_\varepsilon = \varepsilon \text{ .)}$$

Ist $c \in X$ und ist $g : X \to X$ mit $g(x) \equiv c\,(x \in X)$, so ist auch g stetig (auf X).

2. Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x = 0 \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f stetig an allen Stellen $x_0 \neq 0$.
(Denn: Es seien $x_0 \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Ist $\delta_\varepsilon := \min(\varepsilon, |x_0|)$ so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ insbesondere $x \neq 0$ und damit

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon \text{).}$$

Ferner ist f unstetig an $x_0 = 0$.
(Denn: Wir betrachten $\varepsilon = 1/2$. Ist $\delta > 0$ beliebig, so gilt für $x := \min(1/2, \delta/2)$ einerseits $|x - 0| = x < \delta$ und andererseits

$$|f(x) - f(0)| = 1 - x \geq 1/2 \text{).}$$

Wir wollen nun der obigen "ε-δ_ε-Definition" Charakterisierungen zur Seite stellen, die oft besser zu handhaben sind. In diesem Zusammenhang führen wir auch den wichtigen Begriff des Grenzwertes einer Funktion ein.

Definition 8.4 Es seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, $M \subset X$, und es seien $f : M \to Y$ sowie $y_0 \in Y$. Ferner sei x_0 ein Häufungspunkt von M. Wir sagen, f habe an x_0 den *(Funktions-) Grenzwert* y_0, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ existiert mit

$$e(f(x), y_0) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M \text{ mit } 0 < d(x, x_0) < \delta_\varepsilon.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad \text{oder} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} f(x) = y_0 \quad \text{oder kurz} \quad f(x) \to y_0 \quad (x \to x_0) \text{ .}$$

Ist speziell $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und $x_0 \in H(M^+)$, wobei $M^+ := \{x \in M : x \geq x_0\}$ (bzw. $x_0 \in H(M^-)$, wobei $M^- := \{x \in M : x \leq x_0\}$), so schreiben wir auch

$$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M^+}} f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M^-}} f(x) .$$

($f(x_0^+)$ heißt *rechtsseitiger Grenzwert* und $f(x_0^-)$ *linksseitiger Grenzwert* an x_0).

Bemerkung 8.5 1. Man beachte, dass im Falle von D. 8.4 der Punkt x_0 in M liegen kann oder auch nicht. Auch im Falle $x_0 \in M$ spielt der Funktionswert $f(x_0)$ bei der Grenzwertuntersuchung keine Rolle! So ist etwa in B. 8.3.2

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 .$$

2. Aus den entsprechenden Definitionen ergibt sich unmittelbar: Sind $f : M \to Y$ und x_0 ein Häufungspunkt von M, so gilt $f(x) \to y_0$ genau dann, wenn die Funktion $\tilde{f} : M \cup \{x_0\} \to Y$, definiert durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} y_0, & \text{falls} \quad x = x_0 \\ f(x), & \text{falls} \quad x \in M,\, x \neq x_0 \end{cases}$$

stetig an x_0 ist. Insbesondere gilt in Falle $x_0 \in H(M) \cup M$ damit

$$f \text{ stetig an } x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \to f(x_0) \quad (x \to x_0) .$$

(Aus der Definition der Stetigkeit folgt zudem sofort: Ist $x_0 \in M \setminus H(M)$, so ist f stets stetig an x_0.)
3. Man sieht leicht ([Ü]), dass im Falle $X = \mathbb{R}$ und $x_0 \in H(M^+) \cap H(M^-)$ gilt: $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn $f(x_0^+)$ und $f(x_0^-)$ existieren und $f(x_0^+) = f(x_0^-) = y_0$ erfüllt ist.

Beispiel 8.6 1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1, & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Dann gilt

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \qquad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

und $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.
2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Dann existiert für **kein** x_0 in $\mathbb{R}$ der (rechts- oder linksseitige) Grenzwert!
(Denn: Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und ist $\delta > 0$, so existieren x_1, x_2 mit $x_0 < x_j < x_0 + \delta$ $(j = 1, 2)$ sowie $f(x_1) = 1$ und $f(x_2) = 0$ (nach B. A.11 und [Ü]). Hieraus folgt, dass kein rechtsseitiger Grenzwert an x_0 existiert. Entsprechend sieht man, dass kein linksseitiger Grenzwert existiert.)
Insbesondere ist damit f unstetig an allen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$.

Wir beweisen folgende wichtige Charakterisierungen des Grenzwertwes und der Stetigkeit:

Satz 8.7 *Es seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, $M \subset X$ und $f : M \to Y$. Ferner seien $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$.*

1. *Ist $x_0 \in H(M)$, so sind äquivalent:*
   a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$
   b) *Für alle Folgen (x_n) in M mit $x_n \to x_0$ und $x_n \neq x_0$ gilt $f(x_n) \to y_0$.*
2. *Ist $x_0 \in M$, so sind äquivalent:*
   a) *f ist stetig an der Stelle x_0.*
   b) *Für alle Folgen (x_n) in M mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Beweis.
1. Wir zeigen $b) \Rightarrow a)$ von 1.:
Angenommen, $f(x) \not\to y_0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in M$ existiert mit $0 < d(x, x_0) < \delta$ und $e(f(x), y_0) \geq \varepsilon$. Insbesondere existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $0 < d(x_n, x_0) < 1/n$ und $e(f(x_n), y_0) \geq \varepsilon$. Für die Folge (x_n) in M gilt damit $x_n \to x_0\,(n \to \infty), x_n \neq x_0$ und $f(x_n) \not\to y_0$. Widerspruch!
2. Wir zeigen $a) \Rightarrow b)$ von 2.:
Es sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig an x_0 ist existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass $e(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$. Aus $x_n \to x_0$ folgt die Existenz eines $N_\varepsilon = N(\delta_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Also gilt auch $e(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon\,(n \geq N_\varepsilon)$.
3. Wir zeigen $b) \Rightarrow a)$ von 2.:
Ist $x_0 \notin H(M)$ so ist nach Definition f jedenfalls stetig an x_0. Es sei also $x_0 \in H(M)$. Nach Voraussetzung und Beweisschritt 1. gilt dann $f(x) \to f(x_0)$ $(x \to x_0)$. Also ist f stetig an x_0 nach B. 8.5.2
4. Wir zeigen $a) \Rightarrow b)$ von 1.:
Nach Voraussetzung und B. 8.5.2 ist $\tilde{f}$ stetig an x_0. Ist (x_n) eine Folge in M mit $x_0 \neq x_n \to x_0$, so gilt $f(x_n) = \tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(x_0) = y_0$ nach Beweisschritt 2. $\square$

Beispiel 8.8 1. Es sei $(X,d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$. Dann gilt

$$\frac{e^z - 1}{z} \to 1 \quad (z \to 0)$$

(Denn: Für $0 < |z| < 1$ ist

$$|\frac{e^z-1}{z} - 1| = \left|\frac{1}{z}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^\mu}{\mu!} - 1\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\nu+1)!}\right| \le \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|z|^\nu}{(\nu+1)!} \le \sum_{\nu=1}^{\infty}|z|^\nu = \frac{|z|}{1-|z|}.$$

Ist (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $z_n \to 0$, so gilt

$$\frac{|z_n|}{1-|z_n|} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

und folglich auch

$$\left|\frac{e^{z_n}-1}{z_n} - 1\right| \to 0 \qquad (n \to \infty)\ .$$

Da (z_n) beliebig war, folgt die Behauptung.)

Bemerkung 8.9 Ist speziell $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, so setzen wir $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) := y_0$ (bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) := y_0$) falls die Bedingung aus S. 8.7.1 b) mit $x_n \to \infty$ (bzw. $x_n \to -\infty$) anstelle von $x_n \to x_0$ gilt. Außerdem schreiben wir im Falle $Y = \mathbb{R}$ auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), falls die Bedingung aus S. 8.7.1 b) mit $y_0 = \infty$ (bzw. $y_0 = -\infty$) erfüllt ist.
So gilt etwa für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} x^m = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} 1/x^m = 0\ .$$

Satz 8.10 *Es seien (X,d_X), (Y,d_Y) und (Z,d_Z) metrische Räume, $M \subset X$, und es seien $f : M \to Y$ und $g : Y \to Z$. Ist $x_0 \in X$ so, dass $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert, und ist g stetig an y_0, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = g(y_0)$. Ist zudem f stetig an x_0, so ist auch $g\circ f$ stetig an x_0.*

Beweis. Es sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x_0\,(n\to\infty)$ und $x_n \neq x_0$. Dann gilt $f(x_n) \to y_0\,(n\to\infty)$. Da g stetig an y_0 ist, gilt dann auch $g(f(x_n)) \to g(y_0)\,(n\to\infty)$ nach S. 8.7.2. Also ist $\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = g(y_0)$.
Ist f stetig an x_0, so ist $y_0 = f(x_0)$. Damit ergibt sich die zweite Aussage nach B. 8.5.2. □

Bemerkung und Definition 8.11 Ist (X, d) ein metrischer Raum, $M \subset X$ und sind $f, g : M \to \mathbb{K}$ (also reell- oder komplexwertig), so definieren wir

$$\begin{array}{lllll} f+g & : & M \to \mathbb{K} & \text{durch} & (f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in M) \\ f \cdot g & : & M \to \mathbb{K} & \text{durch} & (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in M) \\ f/g & : & M \to \mathbb{K} & \text{durch} & (f/g)(x) := f(x)/g(x) \quad (x \in M) \end{array}$$

(wobei im Falle f/g natürlich $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt wird).
Gilt für ein $x_0 \in H(M)$

$$f(x) \to a \qquad \text{und} \qquad g(x) \to b \qquad (x \to x_0),$$

so folgt

$$(f+g)(x) \to a+b \qquad \text{und} \qquad (f \cdot g)(x) \to a \cdot b \quad (x \to x_0)$$

und im Falle $b \neq 0$ auch

$$(f/g)(x) \to a/b \qquad (x \to x_0)\ .$$

(Der Beweis ergibt sich leicht aus den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen in $\mathbb{K}$ (S. 5.5) und S. 8.7.1).
Hieraus ergibt sich nach B. 8.5.2 auch: Ist $x_0 \in M$ und sind f und g stetig an x_0, so sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und f/g stetig an x_0.

Beispiel 8.12 1. Es seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ und es sei $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$P(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \qquad (x \in K)\ .$$

(Funktionen dieser Form heißen *Polynome* (in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$)).
Dann ist P stetig auf $\mathbb{K}$.
(Denn: Nach B. 8.3.1 sind $P_0, P_1 : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit $P_0(x) := c$, wobei $c \in \mathbb{K}$ fest, und $P_1(x) := x$, stetig auf $\mathbb{K}$. Durch sukzessive Anwendung von B/D 8.11 ergibt sich die Stetigkeit von P.)
Ist $Q : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ein weiteres Polynom, so ist $R = P/Q$ definiert und stetig auf $\mathbb{K} \setminus N_Q$, wobei $N_Q := \{x \in \mathbb{K} : Q(x) = 0\}$.

2. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig
(Denn: Zunächst gilt nach B. 8.6.1

$$\lim_{z \to 0} e^z - 1 = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{e^z - 1}{z} = 0 \cdot 1 = 0\ .$$

Es sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$e^z - e^{z_0} = e^{z_0}(e^{z-z_0} - 1)\ .$$

Also folgt (da $z - z_0 \to 0$ für $z \to z_0$)

$$\lim_{z \to z_0} e^z - e^{z_0} = e^{z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} (e^{z - z_0} - 1) = e^{z_0} 0 = 0$$

und damit

$$\lim_{z \to z_0} e^z = e^{z_0} \ .$$

Mit B. 8.5.2 ergibt sich die Behauptung.)
Nach B./D. 8.11 sind damit auch die Funktionen $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

Wir untersuchen nun speziell Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, wobei $M \subset \mathbb{R}$, also reellwertige Funktionen einer reellen Variablen. Zunächst beweisen wir

Satz 8.13 *(Zwischenwertsatz)*
Es sei $I \neq \emptyset$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I. Dann ist auch $J := W(f)(= f(I))$ wieder ein Intervall.

Beweis. Ist J einpunktig, so ist J insbesondere ein Intervall. Es seien also $\underline{y}, \overline{y} \in J$, wobei o. E. $\underline{y} < \overline{y}$. Dann ist zu zeigen: Ist $\eta \in (\underline{y}, \overline{y})$ so existiert ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$. Zunächst existieren $\underline{x}, \overline{x} \in I$ mit $f(\underline{x}) = \underline{y}$ und $f(\overline{x}) = \overline{y}$. O. E. sei $\underline{x} < \overline{x}$ (sonst betrachte man $-f$). Wir setzen

$$M := \{x \in [\underline{x}, \overline{x}) : f(x) \leq \eta\} \ .$$

Dann ist $M \neq \emptyset$ (da $\underline{x} \in M$) und beschränkt, also existiert

$$\xi := \sup M \in [\underline{x}, \overline{x}] \subset I \ .$$

Behauptung: Es gilt $f(\xi) = \eta$.
Denn: Es existiert eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$. Da f stetig an $\xi \in I$ ist, gilt $f(x_n) \to f(\xi)$ also $f(\xi) \leq \eta$. Aus $f(\overline{x}) = \overline{y} > \eta$ folgt $\xi < \overline{x}$. Ist $(\tilde{x}_n)$ eine Folge in $(\xi, \overline{x}]$ mit $\tilde{x}_n \to \xi$, so folgt $\eta < f(\tilde{x}_n) \to f(\xi)$ $(n \to \infty)$, also $f(\xi) \geq \eta$ und damit $f(\xi) = \eta$.
□

Bemerkung 8.14 Die Aussage von S. 8.13 ist i. A. falsch, falls f unstetig an einer Stelle $x_0 \in I$ ist. Ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

so ist $W(f) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$, also kein Intervall.

Definition 8.15 Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

1. *monoton wachsend*, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$,
2. *streng monoton wachsend*, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$,
3. *(streng) monoton-fallend*, falls $-f$ (streng) monoton wachsend ist.

Es ist klar, dass i. A. monotone Funktionen nicht überall stetig sind (vgl. etwa B. 8.14.1). Wir werden jedoch sehen, dass die Unstetigkeitsstellen eine besondere Struktur haben und auch nicht "allzu häufig" sind.

Definition 8.16 Es seien $I \neq \emptyset$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Ferner sei f unstetig an der Stelle $x_0 \in I$.
Die Stelle x_0 heißt *Unstetigkeitsstelle 1. Art* (oder auch *Sprungstelle*), falls gilt

a) Ist x_0 nicht rechter Randpunkt von I, so existiert $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$,

b) Ist x_0 nicht linker Randpunkt von I, so existiert $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

Anderenfalls heißt x_0 *Unstetigkeitsstelle 2. Art.*

Beispiel 8.17 1. Es sei $I = \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1, & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Dann ist $x_0 = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 1. Art (es gilt $f(0^+) = 1\ ,\ f(0^-) = -1$).

2. Es sei $I = [0, \infty)$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x = 0 \\ x, & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}$$

Dann ist $x_0 = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 1. Art (es gilt $f(0^+) = 0 \neq f(0)$).

3. Es sei $I = \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Dann ist $x_0 = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art (es gilt $f(0^+) = \infty$, also $f(0^+) \notin \mathbb{R}$).

4. Es sei $I = \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} \sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Dann ist $x_0 = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art (da $f(0^+)$ nicht existiert ([Ü])).

5. Es sei $I = \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Dann ist jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art ($f(x_0^+)$ und $f(x_0^-)$ existieren für kein $x_0 \in \mathbb{R}$).

Für monotone Funktionen gilt

Satz 8.18 *Es sei $I \neq \emptyset$ ein Intervall, und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ monoton (wachsend oder fallend). Dann hat f keine Unstetigkeitsstellen 2. Art und höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen (1. Art). Außerdem gilt für alle $x_0 \in I$*

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \qquad \textit{falls } f \textit{ monoton wächst}$$

und

$$f(x_0^-) \geq f(x_0) \geq f(x_0^+) \qquad \textit{falls } f \textit{ monoton fällt}$$

(wobei im Falle eines Randpunktes x_0 von I jeweils nur eine Ungleichung auftritt).

Beweis. O. E. sei f monoton wachsend (ansonsten betrachte man $-f$).
1. Wir zeigen: Ist $x_0 \in I$ nicht rechter Randpunkt, so existiert $f(x_0^+) \in \mathbb{R}$ und es gilt $f(x_0^+) \geq f(x_0)$:
Da $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x > x_0$ gilt, existiert

$$y_0 := \inf\{f(x) : x \in I,\ x > x_0\}$$

und es gilt $y_0 \geq f(x_0)$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $x_\varepsilon > x_0$ mit $f(x_\varepsilon) < y_0 + \varepsilon$. Mit $\delta_\varepsilon := x_\varepsilon - x_0$ gilt dann für alle x mit $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon = x_\varepsilon$

$$y_0 \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < y_0 + \varepsilon$$

Damit ist $f(x_0^+) = y_0$.
Entsprechend zeigt man die Existenz von $f(x_0^-) \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0^+) \geq f(x_0)$ in dem Falle, dass x_0 nicht linker Randpunkt von I ist. Folglich hat f keine Unstetigkeitsstellen 2. Art und die behaupteten Ungleichungen gelten.

2. Wir zeigen, dass höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen existieren. Dazu setzen wir

$$S(f) := \{x \in I : f \text{ unstetig an } x\} \,(= \{x \in I : x \text{ Unstetigkeitsstelle 1. Art von } f\}) \,.$$

Ist $S(f)$ leer oder einelementig, so ist die Behauptung klar. Es sei also $S(f)$ mindestens zweielementig. Für $x \in S(f)$ setzen wir

$$I(x) := (f(x^-), f(x^+)) \,.$$

(mit $f(x^-) := -\infty$ falls x linker Randpunkt von I und $f(x^+) := \infty$ falls x rechter Randpunkt von I).
Dann folgt aus der Monotonie von f für $x_1, x_2 \in S(f)$ mit $x_1 < x_2$:

$$I(x_1) \cap I(x_2) = \emptyset$$

(da $f(x_1^+) \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq f(x_2^-)$). Nach B. A.11 ist $I(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, also können wir ein $\varphi(x) \in I(x) \cap \mathbb{Q}$ wählen. Es gilt dann $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ für $x_1 \neq x_2$. Also ist φ eine bijektive Abbildung von $S(f)$ nach $W(\varphi) \subset \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch $W(\varphi)$ und damit auch $S(f)$ abzählbar. □

Beispiel 8.19 Es sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{n} \qquad \text{für } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \text{ und } n \in \mathbb{N} \,.$$

Dann ist f monoton wachsend auf $(0,1)$ und jede Stelle $x_n = 1/n \, (n \in \mathbb{N})$ ist eine Sprungstelle. Also hat f abzählbar unendlich viele Sprungstellen.

Zum Abschluss befassen wir uns noch mit der Umkehrbarkeit streng monotoner Funktionen.

Satz 8.20 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann gilt*

1. *Die Umkehrfunktion f^{-1} existiert auf $J := W(f)$ und f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend). Außerdem ist f^{-1} stetig.*
2. *Ist f zudem stetig, so ist J ein Intervall.*

Beweis. 1. Aus D. 8.15 sieht man leicht, dass $f : I \to J$ bijektiv ist, d. h. $f^{-1} : J \to I$ existiert. Weiter ist $f^{-1} : J \to I$ streng monoton wachsend.
(Denn: Angenommen, es existieren $y_1, y_2 \in J$ mit $y_1 < y_2$ und $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$. Dann gilt $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, da f (streng) monoton wachsend ist. Widerspruch!)
Schließlich ist $f^{-1} : J \to I$ stetig.
(Denn: Es sei $y_0 \in J$ und $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Ist x_0 nicht der rechte Randpunkt von I, und ist $\varepsilon > 0$ (o.E. so klein, dass $x_0 + \varepsilon \in I$), so setzen wir

$$\delta_\varepsilon := f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) \ .$$

Dann ist $\delta_\varepsilon > 0$ und für alle $y \in J$ mit $y_0 \leq y < y_0 + \delta_\varepsilon = f(x_0 + \varepsilon)$ folgt

$$0 \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + \delta_\varepsilon) - f^{-1}(y_0) = \varepsilon \ .$$

Ist x_0 nicht der linke Randpunkt von I, so sieht man entsprechend: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta'_\varepsilon > 0$ so, dass

$$0 \leq f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in J \text{ mit } y_0 - \delta'_\varepsilon < y \leq y_0 \ .$$

Damit ergibt sich die Stetigkeit von f^{-1} für alle $y_0 \in J$.
2. Ist f stetig, so ist $J = W(f)$ nach S. 8.13 ein Intervall. □

9 Topologische Grundbegriffe

Wir untersuchen nun die Struktur von Teilmengen metrischer Räume. Dabei werden wir oft die Fälle $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ zur Veranschaulichung heranziehen. Das Konzept ist jedoch wesentlich allgemeiner ohne das die Begriffe sich gegenüber diesen sehr speziellen Fällen ändern.

Definition 9.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und es sei $x_0 \in X$.

1. Für $\varepsilon > 0$ heißt die Menge
$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$
ε-Umgebung von x_0 (oder auch *Kugel* mit *Radius* ε um x_0).

2. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x_0, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U$.

Beispiel 9.2 1. Ist $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, so ist für $x_0 \in \mathbb{R}$
$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\ .$$
2. Ist $(X, d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, so ist für $z_0 \in \mathbb{C}$
$$\begin{aligned} U_\varepsilon(z_0) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}^2(z - z_0) + \operatorname{Im}^2(z - z_0) < \varepsilon^2\} \end{aligned}$$
der Kreis mit Radius ε um z_0.
3. Ist $(X, d) = \left(\mathbb{R}^3, d_{|\cdot|}\right)$ so ist für $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^3$
$$U_\varepsilon\left(x^{(0)}\right) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{(0)}\right)^2 + \left(x_3 - x_3^{(0)}\right)^2 < \varepsilon^2\right\}$$
die Kugel mit Radius ε um $x^{(0)}$.

Bemerkung 9.3 Aus D. 9.1 ergibt sich leicht folgende Charakterisierung der Konvergenz einer Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X, d).
Es gilt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N_U \in \mathbb{N}$ existiert mit
$$x_n \in U \qquad \text{für alle} \quad n \geq N_U\ .$$
([Ü]).

Definition 9.4 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$.

1. Ein Punkt $x_0 \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, falls ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset M$ existiert (d. h. M ist Umgebung von x_0).

2. Die Menge
$$M^0 := \{x \in M : x \text{ innerer Punkt von } M\} \ (\subset M)$$
heißt *innerer Kern* (oder *Inneres*) von M.

3. M heißt *offen* (in (X, d)) falls $M = M^0$ gilt (d. h. jeder Punkt von M ist innerer Punkt).

Satz 9.5 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum.*

1. *Für alle $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(x_0)$ offen.*

2. *Sind $M_1, M_2 \subset X$ mit $M_1 \subset M_2$, so ist $M_1^0 \subset M_2^0$.*

3. *Für $M \subset X$ ist M^0 offen und es gilt*
$$M^0 = \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \subset M \\ \mathcal{O} \text{ offen}}} \mathcal{O} \, .$$

Beweis. 1. Es sei $x_1 \in U_\varepsilon(x_0)$. Für $\delta := \varepsilon - d(x_1, x_0)$ gilt $\delta > 0$ und für alle $x \in U_\delta(x_1)$ gilt
$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < \delta + d(x_1, x_0) = \varepsilon \, ,$$
d. h. $U_\delta(x_1) \subset U_\varepsilon(x_0)$.

2. Ist $x \in M_1^0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset M_1$. Also ist auch $U_\varepsilon(x) \subset M_2$ und damit $x \in (M_2)^0$.

3. a) Wir haben zu zeigen: $(M^0)^0 = M^0$. Da nach D. 9.4.2 jedenfalls $(M^0)^0 \subset M^0$ gilt, genügt es, $(M^0)^0 \supset M^0$ zu zeigen.
Es sei also $x \in M^0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset M$. Nach 1. ist $U_\varepsilon(x) = (U_\varepsilon(x))^0$ und nach 2. gilt damit
$$U_\varepsilon(x) = (U_\varepsilon(x))^0 \subset M^0 \, .$$
Folglich ist $x \in (M^0)^0$.
b) "$\subset$" ist klar, da $M^0 \subset M$ und M^0 offen nach a).
"$\supset$" Es sei $\mathcal{O} \subset M, \mathcal{O}$ offen. Dann gilt $\mathcal{O} = \mathcal{O}^0 \subset M^0$ nach 2. □

Beispiel 9.6 1. Wir betrachten $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und $M = [a,b]$ für $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. Dann ist $M^0 = (a,b) (\neq M$, also M nicht offen).
(Denn:
"$\subset$": Ist $x \in M^0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset M = [a,b]$, d. h. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset [a,b]$. Also ist $x \neq a$ und $x \neq b$, d. h. $x \in (a,b)$.
"$\supset$": Ist $x \in (a,b)$, so gilt für $\varepsilon := \min(b-x, x-a)$

$$U = U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset M$$

und damit ist $x \in M^0$.)

Nach S. 9.5.3 ist (a,b) offen. Die Intervalle $(a,b], [a,b)$ sind nicht offen. Hingegen sind die Intervalle $(-\infty, b)$ und (a, ∞) offen.

2. Für $a = (a_1, \ldots, a_m), b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\begin{aligned} (a,b) &:= \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : a_j < x_j < b_j \quad (j = 1, \ldots, m)\} \\ &= (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_m, b_m) \end{aligned}$$

(und entsprechend $[a,b), (a,b]$ bzw. $[a,b]$ mit $[a_j, b_j), (a_j, b_j]$ bzw. $[a_j, b_j]$ anstelle von (a_j, b_j)).
Dann ist $[a,b]^0 = (a,b) \left(= [a,b)^0 = (a,b]^0\right)$ ([Ü]).

3. Ist (X,d) ein beliebiger metrischer Raum, so sind X und $\emptyset$ offen in (X,d).
Ist etwa $(X,d) = ([a,b], d_{|\cdot|})$, so ist $[a,b]$ offen in (X,d) (anders als in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$).

Satz 9.7 *Es sei (X,d) ein metrischer Raum.*

1. *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen. (D. h. ist $I (\neq \emptyset)$ eine beliebige Indexmenge und sind $\mathcal{O}_\alpha$ offene Mengen für alle $\alpha \in I$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha$ offen).*
2. *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. (D. h. sind $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$ offene Mengen, so ist $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{O}_j$ offen.)*

Beweis. 1. Es sei $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha$. Dann existiert ein $\alpha \in I$ mit $x \in \mathcal{O}_\alpha$. Da $\mathcal{O}_\alpha$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset \mathcal{O}_\alpha$. Dann ist auch $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha$. Folglich ist $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha$ offen.

2. Es sei $x \in \bigcap_{j=1}^n \mathcal{O}_j$. Dann ist $x \in \mathcal{O}_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Da $\mathcal{O}_j$ offen ist, existiert ein $\varepsilon_j > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subset \mathcal{O}_j$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ gilt $\varepsilon > 0$ und $U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_j}(x) \subset \mathcal{O}_j$

für $j = 1, \ldots, n$ und damit $U_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{O}_j$. Folglich ist $\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{O}_j$ offen. □

Bemerkung 9.8 I. A. ist der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen nicht mehr offen! Man betrachte etwa $\mathcal{O}_n = (-1/n, 1/n) \subset \mathbb{R}$ (mit $d = d_{|\cdot|}$). Dann ist $\mathcal{O}_n$ offen für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

ist nicht offen.

Definition 9.9 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$.

1. M heißt *abgeschlossen* (in (X, d)), falls $M^c = X \setminus M$ offen ist.

2. Die Menge

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \supset M \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

heißt *Abschluss* (oder *abgeschlossene Hülle*) von M.

3. Die Menge

$$\partial M := \overline{M} \setminus M^0$$

heißt *Rand* von M.

Beispiel 9.10 1. Für jeden metrischen Raum (X, d) sind $\emptyset$ und X abgeschlossen (da $X = \emptyset^c$ und $\emptyset = X^c$ offen sind). Es gibt also Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

2. Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Dann ist $[a, b]$ abgeschlossen (denn $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ ist nach B. 9.6.1 und S. 9.7.1 offen). Weiter sind die Intervalle $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ abgeschlossen. Intervalle der Form $[a, b)$ und $(a, b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.

Satz 9.11 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum*

1. *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

2. *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis. Sind A_α ($\alpha \in I$) abgeschlossen, so gilt

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c \qquad \text{und} \qquad \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$$

(de MORGANsche Regeln). Nach Definition sind die A_α^c offen. Damit ergibt sich die Behauptung durch Anwendung von S. 9.7. □

Bemerkung 9.12 Die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist i. A. nicht mehr abgeschlossen. So sind etwa $A_n = (-\infty, -1/n] \cup [1/n, \infty)$ ($n \in \mathbb{N}$) in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ abgeschlossen, aber

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist nicht abgeschlossen (vgl. B. 9.8).

Satz 9.13 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt:*

1. *$\overline{M}$ ist abgeschlossen.*
2. *M ist genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt.*

Beweis. 1. Nach Definition ist $\overline{M}$ Durchschnitt abgeschlossener Mengen. Also ist auch $\overline{M}$ abgeschlossen nach S. 9.11.1.
2. Falls $M = \overline{M}$ gilt, so ist M abgeschlossen nach 1. Ist umgekehrt M abgeschlossen, so folgt $M = \overline{M}$ aus der Definition von $\overline{M}$. □

Weiter gilt folgende wichtige Charakterisierung des Abschlusses:

Satz 9.14 *Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $M \subset X$, so gilt*

$$\overline{M} = M \cup H(M) .$$

Beweis. "$\subset$": Es sei $x \in \overline{M}$. Ist $x \in M$, so ist $x \in M \cup H(M)$. Es sei also $x \notin M$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Angenommen $(U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$. Dann ist $U_\varepsilon(x) \subset M^c$ (beachte: $x \in M^c$). Also ist $A := (U_\varepsilon(x))^c$ abgeschlossen (S. 9.5.1) und $A \supset M$. Folglich ist $A \supset \overline{M}$ und damit $x \in A = (U_\varepsilon(x))^c$. Widerspruch.

"$\supset$": Es sei $x \in M \cup H(M)$. Ist $x \in M$, so ist auch $x \in \overline{M}$. Ist $x \in H(M)$, und ist $A \supset M$, A abgeschlossen, so ist $A^c \subset M^c$ offen. Angenommen $x \notin A$. Dann ist $x \in A^c$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset A^c \subset M^c$. Dies widerspricht aber $x \in H(M)$. Folglich ist $x \in A$ und da $A \supset M, A$ abgeschlossen, beliebig war, ist $x \in \overline{M}$. □

Satz 9.15 *Ist (X,d) ein metrischer Raum, und ist $M \subset X$, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) M ist abgeschlossen

b) $H(M) \subset M$

c) Für alle Folgen (x_n) in M mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ gilt $x \in M$.

Beweis. 1. Die Äquivalenz von a) und b) folgt direkt aus S. 9.14 und S. 9.13.
2. b) $\Rightarrow$ c): Es sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x$. Angenommen, $x \notin M$. Dann ist $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $x \in H(M)$ nach B. 7.17. Nach Voraussetzung ist dann auch $x \in M$. Widerspruch!
c) $\Rightarrow$ b): Ist $x \in H(M)$, so existiert nach B. 7.17 eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to x$. Nach Voraussetzung (also c)) ist $x \in M$. □

Beispiel 9.16 (vgl. B. 7.18)
1. Es sei $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Für $M = \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$ gilt

$$\overline{M} = M \cup \{0\} .$$

Weiter gilt für $M = \mathbb{Q}$ (vgl. B. A.11)

$$\overline{M} = \mathbb{R}$$

sowie $M^0 = \emptyset$ und damit

$$\partial M = \mathbb{R} .$$

2. Es sei $(X,d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$. Für $M = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ gilt $M^0 = M$ (also ist M offen) und

$$\overline{M} = H(M) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \text{ sowie } \partial M = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \{0\} .$$

Definition 9.17 Es sei (X,d) ein metrischer Raum.

1. Eine Teilmenge M von X heißt *dicht* (in X), falls $\overline{M} = X$ gilt.

2. X heißt *separabel*, falls eine abzählbare dichte Teilmenge existiert.

Beispiel 9.18 Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Dann ist $\mathbb{Q}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Also ist $\mathbb{R}$ separabel.

Der folgende Satz macht deutlich, wie Stetigkeit und die topologischen Begriffe Offenheit und Abgeschlossenheit zusammenhängen.

Satz 9.19 *Es seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:*

a) f ist stetig (auf ganz X).

b) Für alle offenen Mengen $\mathcal{O} \subset Y$ ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen in X.

c) Für alle abgschlossenen Mengen $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\mathcal{O} \subset Y$ offen, und es sei $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Dann ist $y := f(x) \in \mathcal{O}$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y) \subset \mathcal{O}$. Da f stetig an x ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(y)$, also $f(U_\delta(x)) \subset \mathcal{O}$. Dies impliziert wiederum $U_\delta(x) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ und damit ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen.

b) $\Rightarrow$ a): Es sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\mathcal{O} := U_\varepsilon(f(x))$ offen in Y, und damit nach Voraussetzung auch $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen in X. Da $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, d. h. $f(U_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}$. Also ist f stetig an x.

Die Äquivalenz von b) und c) ergibt sich durch Komplementbildung (man beachte dabei: für $M \subset Y$ ist $f^{-1}(M^c) = (f^{-1}(M))^c$.) $\square$

Bemerkung 9.20 Für Bildmengen gilt eine S. 9.19 entsprechende Aussage i. A. nicht! Ist etwa $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, so ist für die offene Menge $\mathbb{R}$

$$f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$$

nicht offen. Ist $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$, so ist für die abgeschlossene Menge $\mathbb{R}$

$$g(\mathbb{R}) = (-1, 1) \ ,$$

nicht abgeschlossen.

Wir untersuchen nun eine wichtige Klasse von Mengen, deren Struktur sich unter stetigen Funktionen auf die Bildmenge überträgt.

Definition 9.21 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $K \subset X$. Dann heißt K *(folgen-)kompakt*, falls K abgeschlossen ist und falls jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung 9.22 1. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $K \subset X$ genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K besitzt.
(Denn:
$\Longrightarrow$: Es sei K kompakt. Ist (x_n) eine Folge in K, so existieren ein $x \in X$ und eine Teilfolge (x_{n_j}) mit $x_{n_j} \to x$. Da K abgeschlossen ist, gilt $x \in K$ (S. 9.15).
$\Longleftarrow$: Es reicht zu zeigen: K ist abgeschlossen. Ist (x_n) eine Folge in K mit $x_n \to x$, so gilt auch $x_{n_j} \to x$ für alle Teilfolgen (x_{n_j}) von (x_n). Damit ist nach Voraussetzung $x \in K$. Nach S. 9.15 ist K abgeschlossen.)

2. Ist $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, und ist $K \subset V$ kompakt, so ist K insbesondere beschränkt (und abgeschlossen nach Definition).
(Denn: Angenommen, nicht. Dann existiert eine Folge (x_n) in K mit $||x_n|| \to \infty$ $(n \to \infty)$. Diese Folge besitzt keine konvergente Teilfolge; man beachte dabei: konvergente Folgen sind notwendig beschränkt, auch in allgemeinen normierten Räumen.)

Im Falle $(V, ||\cdot||) = (\mathbb{K}^m, |\cdot|)$ ergibt sich aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß unmittelbar folgende wichtige Umkehrung der Aussage von B. 9.22.2:

Satz 9.23 *(Heine-Borel)*
Es sei $M \subset \mathbb{K}^m$ (mit $d = d_{|\cdot|}$). Dann sind äquivalent

a) M ist kompakt

b) M ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) gilt nach B. 9.22.2.
b) $\Rightarrow$ a): Es sei (x_n) eine Folge in M. Da M beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß (S. 7.15) eine konvergente Teilfolge (x_{n_j}). □

Beispiel 9.24 Für $a = (a_1, \ldots, a_m),\ b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a_j \leq b_j$ sei

$$M = [a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]\,.$$

Dann ist M beschränkt und abgeschlossen, wie man sich leicht überlegen kann. Also ist M nach S. 9.23 auch kompakt.

Bemerkung 9.25 1. Eine S. 9.23 entsprechende Aussage gilt nicht mehr in allgemeineren normierten Räumen! Zwar folgt aus der Kompaktheit von M stets die Beschränktheit und die Abgschlossenheit (nach B. 9.22.2). Jedoch sind umgekehrt Teilmengen M, die beschränkt und abgeschossen sind, i. A. nicht kompakt!
Ist etwa $(V, ||\cdot||) = (B([0,1], ||\cdot||_\infty)$, so ist

$$M := \{\chi_{\{a\}} : a \in [0,1]\}$$

beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt ([Ü]).

Wir untersuchen jetzt stetige Funktionen auf kompakten Mengen.

Satz 9.26 *Es seien (X,d) und (Y,e) metrische Räume. Dann gilt: Ist $K \subset X$ kompakt und ist $f : K \to Y$ stetig, so ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $f(K)$. Dann existieren $x_n \in K$ mit $y_n = f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Da K kompakt ist, existieren nach B. 9.22.1 ein $x \in K$ und eine Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) mit $x_{n_j} \to x$ $(j \to \infty)$.
Da f stetig ist, folgt

$$y_{n_j} = f(x_{n_j}) \to f(x) \in f(K) \qquad (j \to \infty)\ .$$

Wieder nach B. 9.22.1 ist $f(K)$ kompakt. $\square$

Für reellwertige Funktionen hat der Satz eine wichtige Konsequenz. Um diese formulieren zu können, brauchen wir eine Definition.

Definition 9.27 Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge, und es sei $f : M \to \mathbb{R}$.

1. Man sagt, f hat ein (*absolutes* oder auch *globales*) *Maximum*, falls $\max\limits_M f(x) := \max f(M)$ existiert. Ist $x_0 \in M$ so, dass $f(x_0) = \max\limits_M f(x)$ gilt, d. h. ist
$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in M\ ,$$
so sagt man, f hat ein (absolutes oder globales) Maximum *an* x_0.

2. Man sagt, f hat ein (*absolutes* oder auch *globales*) *Minimum*, falls $\min\limits_M f(x) := \min f(M)$ existiert. Ist $x_0 \in M$ so, dass $f(x_0) = \min\limits_M f(x)$ gilt, d. h. ist
$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in M\ ,$$
so sagt man, f hat ein (absolutes oder globales) Minimum *an* x_0.

Beispiel 9.28 Es sei $M = \mathbb{R}$. Ist $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, so hat f an $x_0 = 0$ ein absolutes Minimum, aber f hat kein Maximum. Ist $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$, so ist g beschränkt, aber g hat weder ein Maximum noch ein Minimum.

Satz 9.29 *Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum, d. h. es existieren $x_1, x_2 \in K$ mit*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \textit{für alle} \quad x \in K\,.$$

Beweis. Zunächst gilt allgemein: Ist $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen, so existieren $\max M$ und $\min M$ ([Ü]).
Nach S. 9.26 ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also auch beschränkt und abgeschlossen. Damit existieren $\max f(K)$ und $\min f(K)$. □

Beispiel 9.30 Es sei $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ und $f(x) := x^2$ $(x \in [-a, a])$. Dann ist

$$f(a) = f(-a) = \max_{[-a,a]} f(x)$$

d. h. f hat an a und $-a$ absolute Maxima. Außerdem ist

$$f(0) = \min_{[-a,a]} f(x)\,.$$

Eine sehr elegante Anwendung von S. 9.26 ist:

Satz 9.31 *Es seien (K, d) und (Y, e) metrische Räume, und es sei K kompakt. Ist $f : K \to Y$ bijektiv und stetig, so ist auch $f^{-1} : Y \to K$ stetig.*

Beweis. Es sei $A \subset K$ abgeschlossen. Nach S. 9.19 reicht es zu zeigen:
$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \subset Y$ ist abgeschlossen.
Da K kompakt ist, ist A als abgeschlossene Teilmenge auch kompakt. Also ist $f(A) \subset Y$ kompakt nach S. 9.26 und damit insbesondere abgeschlossen. □

Eine weitere wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen auf kompakten Mengen ist die gleichmäßige Stetigkeit:

Definition 9.32 Es seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, und es sei $f : M \to Y$, wobei $M \subset X$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig* (auf M), falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$e(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in M \text{ mit } d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon\,.$$

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass jede auf einer Menge M gleichmäßig stetige Funktion auch stetig auf M (d. h. stetig in jedem Punkt $x \in M$) ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Stetigkeit auf einer Menge i. A. nicht die gleichmäßige Stetigkeit impliziert.

Beispiel 9.33 Es sei $f : R \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig.
(Es sei $\varepsilon = 1$, und es sei $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen $x_1 = 1/\delta, x_2 = 1/\delta + \delta/2$. Dann ist $|x_1 - x_2| = \delta/2 < \delta$, aber

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| > 2/\delta \cdot \delta/2 = 1 = \varepsilon\ .$$

Folglich ist f nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.)
Andererseits ist $f_{|[0,1]}$ gleichmäßig stetig.
(Denn: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt mit $\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ für alle $x_1, x_2 \in [0,1]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \leq 2|x_1 - x_2| < \varepsilon\ .)$$

Es gilt allgemein

Satz 9.34 *Es seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume. Ist $K \subset X$ kompakt und ist $f : K \to Y$ stetig auf K, so ist f auch gleichmäßig stetig auf K.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte $x_n, y_n \in K$ existieren mit

$$d(x_n, y_n) < 1/n \qquad \text{und} \quad e(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon\ .$$

Die Folge (x_n) besitzt nach B. 9.22.1 eine Teilfolge $(x_{n_j})_j$ mit $x_{n_j} \to x \in K$.
Dann gilt

$$d(x, y_{n_j}) \leq d(x, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, y_{n_j}) \to 0 \qquad (n \to \infty)\ .$$

d. h. $y_{n_j} \to x$ $(j \to \infty)$. Also folgt auf Grund der Stetigkeit von f an der Stelle x

$$\varepsilon \leq e(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \leq e(f(x_{n_j}), f(x)) + e(f(x), f(y_{n_j})) \to 0 \quad (j \to \infty)\ .$$

Widerspruch! □

Als wichtige Anwendung von S. 9.29 beweisen wir

Satz 9.35 *(Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{K}^m$)*
Es seien $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ zwei Normen auf $\mathbb{K}^m$. Dann existieren Konstanten $m,\ M > 0$ so, dass

$$m||x||' \ \leq\ ||x|| \ \leq\ M||x||' \qquad (x \in \mathbb{K}^m)\ .$$

Beweis. 1. Wir zeigen die Behauptung für $||\cdot||' = |\cdot|$ ($= \ ||\cdot||_2$). Zunächst gilt für $x = (x_1, \dots, x_m) = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j e^{(j)}$, wobei

$$e_k^{(j)} := \delta_{jk} \qquad (j,k = 1,\dots,m)$$

(d.h. $e^{(j)} = j$-ter Einheitsvektor),

$$||x|| \le \sum_{j=1}^{d} \underbrace{|x_j|}_{\le |x|} \cdot ||e^{(j)}|| \ \le |x| \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{m} ||e^{(j)}||}_{=:M} .$$

Weiter betrachten wir die Abbildung $\varphi := \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := ||x|| \qquad (x \in \mathbb{K}^m) .$$

Dann gilt für $x, y \in \mathbb{K}^m$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \Big| ||x|| - ||y|| \Big| \le ||x - y|| \le M|x - y| ,$$

also ist φ stetig (bzgl. der Metriken $d_{|\cdot|}$ auf $\mathbb{K}^m$ bzw. $\mathbb{R}$). Außerdem ist

$$B := \{x \in \mathbb{K}^m : |x| = 1\}$$

beschränkt und abgeschlossen, also auch kompakt nach dem Satz von Heine-Borel. Folglich existiert nach S. 9.29

$$\min_B \varphi(x) = m > 0$$

(beachte: $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in B$, da $||\cdot||$ Norm). Damit gilt für alle $x \in \mathbb{K}^m, x \ne 0$

$$||x|| \ = \ || \ |x| \cdot \frac{x}{|x|} || \ = \ |x| \ \cdot || \underbrace{\frac{x}{|x|}}_{\in B} || \ \ge \ |x| \, m$$

(und für $x = 0$ ist dies trivialerweise erfüllt).

2. Ist $||\cdot||'$ irgendeine Norm auf $\mathbb{K}^m$, so existieren nach 1. Konstanten $m', M' > 0$ mit

$$m'|x| \le ||x||' \le M'|x| \qquad (x \in \mathbb{K}^m) .$$

Also folgt für alle $x \in \mathbb{K}^m$

$$||x|| \le M|x| \le \frac{M}{m'}||x||'$$

und

$$||x|| \ge m|x| \ge \frac{m}{M'}||x||' .$$

□

Bemerkung 9.36 Eine wichtige Folgerung aus S. 9.35 ist die Tatsache, dass eine Folge in $\mathbb{K}^m$ genau dann bzgl. $d_{||\cdot||}$ für irgendeine Norm $||\cdot||$ konvergiert (bzw. eine Cauchy-Folge ist), wenn sie bzgl. $d_{|\cdot|}$ konvergiert (bzw. eine Cauchy-Folge ist).

10 Differenzialrechnung von Funktionen einer Variablen

Wir betrachten Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Um die feinere Struktur solcher Funktionen untersuchen zu können, brauchen wir einen über die Stetigkeit hinausgehenden "Glattheitsbegriff". Grob gesagt wollen wir Funktionen definieren, deren Graph keine "Ecken" hat; d. h. Funktionen, die Tangenten an den Graph besitzen. Diese Tangenten spiegeln das Veränderungsverhalten der Funktion wider.

Die **Idee** ist folgende: Wir betrachten für zwei Punkte $x_0, x \in M$ Sekanten S_x durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ in $\mathbb{R}^2$. Diese Sekanten sind festgelegt durch $(x_0, f(x_0))$ und ihre Steigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(Verhältnis der Änderung von f zur Änderung von x). Für $x \to x_0$ wird die Grenzgerade T, falls existent, als Tangente an den Graph im Punkt $(x_0, f(x_0))$ angesehen. Die Steigung von T ist ein Maß für die Änderung der Funktionswerte in der Nähe von x_0. Dies fassen wir in eine exakte Definition, wobei wir allgemeinere Definitionsbereiche in $\mathbb{C}$ und komplexwertige Funktionen zulassen.

Definition 10.1 Es seien $M \subset \mathbb{K}$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Weiter sei $x_0 \in M \cap H(M)$.

1. f heißt *differenzierbar* an der Stelle x_0, falls der Grenzwert
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert als *Ableitung* von f an der Stelle x_0 und schreiben dafür $f'(x_0)$ (oder auch $\frac{df}{dx}(x_0)$).

2. f heißt *differenzierbar auf* $M_0 \subset M$ falls f in jedem Punkt $x_0 \in M_0$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : M_0 \to \mathbb{K}$ heißt dann *Ableitung* von f (*auf* M_0).

3. *Höhere Ableitungen* von f werden rekursiv definiert: Ist $f^{(1)} := f'$ differenzierbar auf M_0, so schreiben wir $f^{(2)} := f'' := (f')'$. Ist f'' differenzierbar auf M_0, so ist $f^{(3)} := f''' = (f'')'$ u. s. w. Wir schreiben für die höheren Ableitungen stets $f^{(n)}$.

Beispiel 10.2 1. Ist $f(x) \equiv c$ $(x \in \mathbb{C})$ für eine Konstante $c \in \mathbb{K}$, so ist f differenzierbar auf $\mathbb{C}$ und es gilt

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

2. Für $f(x) := cx$ $(x \in \mathbb{C})$, wobei $c \in \mathbb{K}$ eine Konstante ist, gilt

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{c(y - x)}{y - x} = c \qquad (x \in \mathbb{C}) .$$

3. Für $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{C})$ gilt

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{y^2 - x^2}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{(y+x)(y-x)}{y-x} = \lim_{y \to x} y + x = 2x \qquad (x \in \mathbb{C}) \ .$$

4. Die Funktion $f(x) := |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$, denn ist (x_n) eine Folge mit $x_n \to 0$ und $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so gilt

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = 1 \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

und ist (x_n) eine Folge mit $x_n \to 0$ und $x_n < 0$, so gilt

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{-x_n}{x_n} = -1 \to -1 \qquad (n \to \infty) \ .$$

Also existiert

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

nicht!

Dieses Beispiel zeigt, dass die Stetigkeit an einer Stelle i. A. **nicht** die Differenzierbarkeit an dieser Stelle impliziert. Es gilt jedoch umgekehrt:

Satz 10.3 *Ist $f : M \to \mathbb{K}$ differenzierbar auf der Menge $M_0 \subset M$, so ist f stetig auf M_0.*

Beweis. Es sei $x_0 \in M_0$ und es sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ und $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$f(x_n) - f(x_0) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}(x_n - x_0) \to f'(x_0)(x_0 - x_0) = 0 \qquad (n \to \infty) \ ,$$

d. h. $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$. Also ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Wir stellen wichtige Rechenregeln für die Differenziation zusammen.

Satz 10.4 *(Summen-, Produkt- und Quotientenregel)*
Es sei $M \subset \mathbb{C}$ und es seien $f, g : M \to \mathbb{K}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in M$. Dann gilt

1. *Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar an x_0, und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0) \ .$$

2. *$f \cdot g$ ist differenzierbar an x_0, und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \ .$$

3. Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in M$, so ist auch f/g differenzierbar an x_0, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} .$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis von 3. Der Beweis von 1. und 2. verläuft ähnlich.
Da g differenzierbar an x_0 ist, ist g auch stetig an x_0 (S. 10.3). Es sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ und $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{(f/g)(x_n) - (f/g)(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{1}{g(x_n)g(x_0)}\left[\frac{f(x_n)g(x_0) - f(x_0)g(x_n)}{x_n - x_0}\right] \\
&= \frac{1}{g(x_n)g(x_0)}\left[\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}\right] \\
&\to \frac{1}{g^2(x_0)}\left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\right] \qquad (n \to \infty) .
\end{aligned}$$

Damit ist 3. bewiesen. □

Beispiel 10.5 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = x^n$ differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(Denn: Für $n = 1$ gilt die Behauptung nach B. 10.2.2 (mit $0^0 := 1$).
Es gelte $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit der Produktregel (S. 10.4.2)

$$(x^{k+1})' = (xx^k)' = 1 \cdot x^k + xkx^{k-1} = (k+1)x^k \qquad (x \in \mathbb{C}) \text{ .)}$$

2. Ist $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom, d. h. $P(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ für gewisse $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, so gilt

$$P'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot a_\nu x^{\nu-1} \qquad (x \in \mathbb{C})$$

(Folgt aus 1. und mehrfacher Anwendung von S. 10.4 1.)

Bevor wir uns mit der Ableitung von Hintereinanderausführungen beschäftigen, wollen wir eine Charakterisierung der Differenzierbarkeit formulieren.

Satz 10.6 *(Zerlegungsformel)*
Es seien $M \subset \mathbb{C}$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Ferner sei $x_0 \in M \cap H(M)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist differenzierbar an x_0.

b) Es existieren ein $c \in \mathbb{K}$ und eine in x_0 stetige Funktion $\varepsilon : M \to \mathbb{K}$ so, dass

$$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0| \qquad (x \in M)$$

und $\varepsilon(x_0) = 0$.

Außerdem ist in diesem Fall $f'(x_0) = c$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wir setzen für $x \in M$

$$\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{|x - x_0|} \left\{ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\} & , \text{ falls } x \neq x_0 \\ 0 & , \text{ falls } x = x_0 \end{cases} .$$

Dann ist

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0|$$

(also $c = f'(x_0)$) und es gilt

$$\varepsilon(x) \to 0 = \varepsilon(x_0) \qquad (x \to x_0)$$

auf Grund der Differenzierbarkeit von f an x_0.

b) $\Rightarrow$ a): Es gilt für $x \in M,\ x \neq x_0$

$$\varepsilon(x) \cdot \frac{|x - x_0|}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c\,.$$

Aus $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to x_0)$ folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to c \qquad (x \to x_0)$$

also ist f differenzierbar an x_0 mit $f'(x_0) = c$. $\square$

Satz 10.7 *(Kettenregel)*
Es sei $M \subset \mathbb{C}$ und es sei $h : M \to \mathbb{K}$. Ferner sei $g : L \to \mathbb{K}$ mit $L \supset W(h)$. Ist h differenzierbar an $x_0 \in M$ und ist g differenzierbar an $y_0 = h(x_0) \in L$, so ist $f = g \circ h$ differenzierbar an x_0 mit

$$f'(x_0) = (g \circ h)'(x_0) = g'(y_0) \cdot h'(x_0) = g'\big(h(x_0)\big)h'(x_0)\,.$$

Beweis. Nach S. 10.6 existieren Funktionen $\varepsilon_h : M \to \mathbb{K}$ und $\varepsilon_g : L \to \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_h(x)|x - x_0| \\ g(y) &= g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \varepsilon_g(y)|y - y_0| \end{aligned}$$

und so, dass ε_h stetig an x_0 und ε_g stetig an $y_0 = h(x_0)$ mit $\varepsilon_h(x_0) = \varepsilon_g(y_0) = 0$ ist. Hieraus folgt für $x \in M$

$$\begin{aligned} f(x) &= g\Big(h(x)\Big) = \\ &= g\Big(h(x_0)\Big) + g'\Big(h(x_0)\Big)\Big(h(x) - h(x_0)\Big) + \varepsilon_g\Big(h(x)\Big)|h(x) - h(x_0)| \\ &= (g \circ h)(x_0) + g'\Big(h(x_0)\Big)\Big[h'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_h(x)|x - x_0|\Big] \\ &+ \varepsilon_g\Big(h(x)\Big)\Big|h'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_h(x)|x - x_0|\Big| \\ &= (g \circ h)(x_0) + g'\Big(h(x_0)\Big)h'(x_0)(x - x_0) \\ &+ |x - x_0|\Big[g'\Big(h(x_0)\Big)\varepsilon_h(x) + \varepsilon_g\Big(h(x)\Big)\Big|h'(x_0) + \varepsilon_h(x)\Big|\Big] \end{aligned}$$

Da h nach S. 10.3 stetig an x_0 ist, ist $\varepsilon_f : M \to \mathbb{K}$ mit

$$\varepsilon_f(x) := g'(y_0)\varepsilon_h(x) + \varepsilon_g\Big(h(x)\Big)|h'(x_0) + \varepsilon_h(x)|$$

stetig an x_0 mit $\varepsilon_f(x_0) = 0$. Aus S. 10.6 ergibt sich die Differenzierbarkeit von $f = g \circ h$ an x_0 und

$$f'(x_0) = g'\Big(h(x_0)\Big)h'(x_0) .$$

□

Beispiel 10.8 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x^3 + 2x + 1)^5 .$$

Dann gilt $f = g \circ h$ mit $h(x) = x^3 + 2x + 1$ und $g(y) = y^5$. Also gilt

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(h(x))h'(x) &= 5(x^3 + 2x + 1)^4 \cdot (x^3 + 2x + 1)' = \\ &= 5(x^3 + 2x + 1)^4(3x^2 + 2) . \end{aligned}$$

Satz 10.9 *(Umkehrregel)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei streng monoton (wachsend oder fallend) auf I. Ist f differenzierbar an $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to I$ differenzierbar an $y_0 = f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $W(f) = D(f^{-1})$ mit $y_n \to y_0$ und $y_n \neq y_0$ $(n \in \mathbb{N})$ (man beachte: $W(f)$ ist ein Intervall nach S. 8.20). Für $x_n := f^{-1}(y_n)$ gilt dann $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ nach S. 8.20. Also erhalten wir

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (n \to \infty) .$$

□

Nun wenden wir uns der Differentiation elementarer Funktionen zu. Die Basis dazu bildet der folgende Satz

Satz 10.10 *Es gilt*

$$\exp' = \exp .$$

Beweis. Nach B. 8.6.1 gilt in $\mathbb{C}$

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1 .$$

Für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ folgt hieraus

$$\lim_{z \to z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0} \lim_{z \to z_0} \frac{e^{z - z_0} - 1}{z - z_0} = e^{z_0} .$$

□

In der anschließenden Bemerkung ziehen wir eine Reihe von Folgerungen hinsichtlich der Ableitungen elementarer Funktionen.

Bemerkung 10.11 1. Es gilt auf $\mathbb{C}$

$$\cos' = -\sin \qquad \text{und} \qquad \sin' = \cos .$$

(Denn: Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\cos'(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z$$

und für sin entsprechend.)

2. Aus 1. und der Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} \tan'(z) &= \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z \qquad (z \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}) \\ \cot'(z) &= -\frac{1}{\sin^2 z} = -1 - \cot^2 z \qquad (z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

3. Ist $a > 0$ fest, so gilt

$$(a^z)' = a^z \ln a \qquad (z \in \mathbb{C})\ .$$

(Denn: $(a^z)' = (e^{z \cdot \ln a})' = \ln a \cdot e^{z \ln a} = \ln a \cdot a^z$.)

4. Für festes $a > 0, a \neq 1$, gilt

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \qquad (x > 0)\ .$$

(Denn: Es sei $f(y) = a^y$ $(y \in \mathbb{R})$. Dann ist $f^{-1}(x) = \log_a x$ $(x > 0)$. Also gilt nach der Umkehrregel und 1. mit $y = \log_a x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \qquad (x > 0)\ .)$$

5. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ fest gilt

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (x > 0)$$

(Denn: $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \alpha e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.)

6. Es gilt

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1))$$

(Denn: Mit der Umkehrregel und 1. gilt für $x \in (-1,1)$ mit $y = \arcsin x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1))\ .$$

Entsprechend für $\arccos x$.)

7. Es gilt

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}) \\ (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})\ . \end{aligned}$$

([Ü])

Wir beschäftigen uns nun mit der geometrischen Interpretation der Ableitung. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter lokalen Extrema verstehen.

Definition 10.12 Es seien (X,d) ein metrischer Raum, $M \subset X$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Ferner sei $x_0 \in M$.

1. Man sagt, f habe an x_0 ein *lokales* (oder auch *relatives*) *Maximum*, falls ein $\delta > 0$ existiert mit
$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in M \cap U_\delta(x_0)$$

2. Man sagt, f habe an x_0 ein *lokales* (oder auch *relatives*) *Minimum*, falls ein $\delta > 0$ existiert mit
$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in M \cap U_\delta(x_0)\ .$$

Die Stellen x_0, an denen lokale Maxima oder Minima vorliegen, bezeichnet man auch als *Extremstellen* von f.

Es gilt folgendes einfache notwendige Kriterium für Extrema differenzierbarer Funktionen.

Satz 10.13 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein* **offenes** *Intervall und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf I. Dann gilt: Ist x_0 eine Extremstelle von f, so ist*
$$f'(x_0) = 0\ .$$
(Punkte x_0 mit $f'(x_0) = 0$ nennt man auch kritische Punkte von f.)

Beweis. O. E. liege an x_0 ein lokales Maximum vor. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Da f differenzierbar an x_0 ist, gilt
$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{\delta}{2n}) - f(x_0)}{\delta/2n} \leq 0$$
und
$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{\delta}{2n}) - f(x_0)}{-\delta/2n} \geq 0\ ,$$
d. h. $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkung 10.14 1. S. 10.13 liefert lediglich eine **notwendige** Bedingung für das Auftreten lokaler Maxima oder Minima. So hat etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ an $x_0 = 0$ einen kritischen Punkt, aber an $x_0 = 0$ liegt kein lokales Extremum vor.
2. Für nicht offene Intervalle I ist die Aussage von S. 10.13 i. A. falsch. So hat etwa $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ an ± 1 (sogar globale) Maxima, aber die Ableitung ist dort $\neq 0$.

Über das Auftreten kritischer Punkte gibt foldender Satz Auskunft

Satz 10.15 *(Rolle)*
Es sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar auf $I^0 = (a,b)$. Gilt $f(a) = f(b)$ so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Ist $f(x) \equiv f(a)$ auf $[a,b]$ so ist jedes $x \in (a,b)$ eine Extremstelle, d. h. $f'(x) \equiv 0$ auf (a,b) nach S. 10.13.
Es sei also $f \not\equiv f(a)(= f(b))$.
Nach S. 9.29 hat f absolute Maxima und Minima auf $[a,b]$. Mindestens eines davon liegt in (a,b). Nach S. 10.13 liegt dort ein kritischer Punkt vor. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz 10.16 *(Mittelwertsatz)*
Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf $I^0 = (a,b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Beweis. Man wende den Satz von Rolle auf die Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (x \in I)$$

an! (Es gilt $\varphi(b) = \varphi(a) = f(a)$ und $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.) □

Wir ziehen verschiedene Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Satz 10.17 *Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf I^0.*
1. Ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. > 0) für alle $x \in I^0$, so ist f monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend) auf I.

2. Ist $f'(x) \leq 0$ (bzw. < 0) für alle $x \in I^0$, so ist f monoton fallend (bzw. streng monoton fallend) auf I.

Beweis. 1. Es seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes für das Intervall $[x_1, x_2]$ ergibt sich mit einem $\xi \in (x_1, x_2)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 ,$$

also $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ist dabei $f'(\xi) > 0$, so ist $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Entsprechend. □

Bemerkung 10.18 Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{K}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf I^0. Dann ist f genau dann konstant, wenn $f'(x) \equiv 0$ auf I^0 gilt.
(Denn:
"$\Rightarrow$" Ist $f(x) \equiv c$ auf I, so gilt natürlich $f'(x) \equiv 0$ auf I^0.
"$\Leftarrow$ Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist f nach S. 10.17 monoton wachsend und monoton fallend. Also ist f konstant. In Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ergibt sich die Behauptung durch Anwendung der entsprechenden Aussagen auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$.)

Der folgende Satz gibt ein **hinreichendes** Kriterien für Extremstellen.

Satz 10.19 *(Vorzeichenwechsel-Kriterium)*
Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem Intervall I und differenzierbar auf I^0. Ferner sei $x_0 \in I$.

1. Existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & \textit{für} \quad x \in I,\, x_0 < x < x_0 + \delta \\ \geq 0 & \textit{für} \quad x \in I,\, x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases},$$

so hat f an x_0 ein lokales Maximun.

2. Existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 & \textit{für} \quad x \in I,\, x_0 < x < x_0 + \delta \\ \leq 0 & \textit{für} \quad x \in I,\, x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases},$$

So hat f an x_0 ein lokales Minimum.

Beweis.
1. Nach S. 10.17 ist f monoton fallend auf $I \cap [x_0, x_0 + \delta)$ und monoton wachsend auf $I \cap (x_0 - \delta, x_0]$. Damit hat f an x_0 ein lokales Maximum.
2. Analog. □

Beispiel 10.20 1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \; .$$

Dann gilt

$$f'(x) = 6x(x+1) \begin{cases} > 0 & , \quad x \in (-\infty, -1) \\ < 0 & , \quad x \in (-1, 0) \\ > 0 & , \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Also ist f streng monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \\ \text{wachsend} \end{array} \right\}$ auf $\left\{ \begin{array}{l} (-\infty, -1] \\ [-1, 0] \\ [0, \infty) \end{array} \right.$.

Anwendung von S. 10.19 zeigt, dass an 0 ein lokales Minimum und and -1 ein lokales Maximum vorliegt.

2. Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad (x > 0) \; .$$

Dann ist f streng monoton wachsend.
(Denn: Es genügt zu zeigen: $g(x) := \ln f(x) = x \cdot \ln(1 + 1/x)$ ist streng monoton wachsend. Es gilt

$$g'(x) = \ln(1 + 1/x) + x \cdot \frac{1}{1 + 1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \ln(1 + 1/x) - \frac{1}{1 + x} > 0$$

([Ü]).)

Zum Abschluss dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit einer eleganten Methode um gewisse Grenzwerte auszurechnen. Dazu beweisen wir zunächst eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

Satz 10.21 *(erweiterter Mittelwertsatz)*
Es sei $I = [a, b]$ und die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien stetig auf I und differenzierbar auf $I^0 = (a, b)$. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \; .$$

Beweis. Zunächst ist nach dem Satz von Rolle $g(a) \neq g(b)$.
Wir betrachten die auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion φ mit

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)] \; .$$

Dann ist $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$ und

$$\varphi'(x) := f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \qquad (x \in (a, b)) .$$

Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $\varphi'(\xi) = 0$, d. h.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) .$$

Da $g'(\xi) \neq 0$ ist, folgt die Behauptung. □

Damit beweisen wir

Satz 10.22 *(Regeln von de l'Hospital)*
Es sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und die Funktion $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf (a, b) mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Ferner gelte

1. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ *(Fall "$\frac{0}{0}$")*

oder

2. $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$ *(oder $-\infty$).*

Dann gilt: Aus

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c.$$

Eine entsprechende Aussage gilt für $x \to b^-$.

Beweis. 1. Es gelte 1. und es sei $a > -\infty$. Durch $g(a) := f(a) := 0$ können f und g stetig nach $[a, b)$ fortgesetzt werden. Es sei (x_n) eine Folge in (a, b) mit $x_n \to a (n \to \infty)$. . Nach S. 10.21 existiert ein $\xi_n \in (a, x_n)$ mit

$$\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} .$$

Da $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Da (x_n) beliebig war, folgt die Behauptung.

Der Beweis für $x \to b^-$, $b < \infty$ verläuft analog. Die Fälle $a = -\infty$ und $b = \infty$ können leicht auf die obigen Fälle zurückgeführt werden ([Ü]).
2. Es gelte o.E. $g(x) \to \infty$. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Falles $c \in \mathbb{R}$. Für $c = \pm\infty$ kann man ähnlich argumentieren.
Es sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $s \in (a, b)$ mit

$$|f'(y)/g'(y) - c| < \varepsilon \quad \text{und} \quad g(y) > 0 \quad (y \in (a, s]) \; .$$

Weiter existiert ein $t \in (a, s]$ so, dass

$$|f(s)|/g(y) < \varepsilon \quad \text{und} \quad g(s)/g(y) < \varepsilon \quad (y \in (a, t])$$

Ist nun $x \in (a, t]$ gegeben, so existiert nach dem erweiterten Mittelwertsatz ein $\xi = \xi_{x,s} \in (x, s)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(s) - f(x)}{g(s) - g(x)} \; .$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(\frac{g(s)}{g(x)} - 1 \right) = \frac{f(s) - f(x)}{g(x)},$$

also

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(s)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(1 - \frac{g(s)}{g(x)} \right) \; .$$

Damit erhalten wir

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| \le \left| \frac{f(s)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - c \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(s)}{g(x)} \right| \le \varepsilon + \varepsilon + (|c| + \varepsilon)\varepsilon \; .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Beispiel 10.23 1. Für $f(x) = \sqrt{x} - 1$ und $g(x) = \sqrt{x - 1}$ $(x > 1)$ gilt

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$$

sowie

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x}} = 0 \; .$$

Also ist auch

$$\lim_{x \to^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}} = 0 \; .$$

2. Für $f(x) = 1 - \cos x$ und $g(x) = x^2$ gilt

$$1 - \cos x \to 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 \to 0 \qquad (x \to 0)$$

sowie
$$\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{\sin x}{2x} \qquad (x \neq 0)\ .$$
Hier liegt wieder der Fall “$\frac{0}{0}$” vor, d. h.
$$\sin x \to 0 \qquad \text{und} \qquad 2x \to 0 \qquad (x \to 0)\ .$$
Weiter gilt
$$\frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \frac{\cos x}{2} \to \frac{1}{2} \qquad (x \to 0)\ .$$
Also ist
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}\ .$$
3. Es gilt für jedes feste $\alpha > 0$:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0\ ,$$
d. h. die Logarithmusfunktion wächst langsamer als jede (noch so kleine) positive Potenz von x.
(Denn: Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$ und
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$
also folgt die Behauptung mit S. 10.22.2.)

4. Für jedes $a > 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty\ ,$$
d. h. exponentielles Wachstum ist schneller als polynomilaes Wachstum.
(Denn: Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ und damit ergibt sich durch wiederholte Anwendung von S. 10.22.2
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x (\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x (\ln a)^n}{n!} = \infty\ .)$$

11 Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Wir haben schon früher gesehen, dass wichtige elementare Funktionen wie die Exponentialfunktion über gewisse Grenzwerte definiert sind. Ziel ist es nun, allgemeine Strukturaussagen über Funktionen zu machen, die sich als Grenzwerte von sog. Funktionenfolgen oder Funktionenreihen ergeben.

Definition 11.1 1. Es sei X eine beliebige Menge, $X \neq \emptyset$, und es sei (Y, d) ein metrischer Raum.

1. Sind $f_n : X \to Y$ Funktionen, so nennt man die Folge $(f_n)_n$ eine *Funktionenfolge*. Die Funktionenfolge (f_n) heißt *punktweise konvergent* auf der Menge $M \subset X$, falls für alle $x \in M$ die Folge $(f_n(x))$ in Y konvergiert. Die Funktion $f : M \to Y$ mit $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ heißt *Grenzfunktion* der Folge (f_n) (auf M).

2. Sind $a_\nu : X \to \mathbb{K}$ (oder auch allgemeiner $a_\nu : X \to E$, wobei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum ist) Funktionen, so heißt die Funktionenfolge (s_n) mit
$$s_n(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) \qquad (x \in X, n \in \mathbb{N}_0)$$
eine *Funktionenreihe*. Wir schreiben wieder $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (oder $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x)$). Die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *punktweise konvergent* auf $M \subset X$ falls (s_n) auf M punktweise konvergiert. Wir verwenden (wie bei Zahlenreihen) das Symbol $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ dann auch wieder für die Grenzfunktion.

Natürlich definiert man entsprechend Funktionenreihen der Form $\sum\limits_{\nu=\nu_0}^{\infty} a_\nu(x)$ auch für allgemeine $\nu_0 \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 11.2 1. Wir betrachten die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N})\ .$$
Dann gilt
$$f_n(x) \to \begin{cases} 0 \ , & \text{falls} \quad x \in (-1, 1) \\ 1 \ , & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} ,$$
d. h. (f_n) konvergiert punktweise auf $(-1, 1]$ und die Grenzfunktion $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \in (-1, 1) \\ 1 \ , & x = 1 \end{cases} .$$

2. Es seien $a_\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$a_\nu(z) = \frac{1}{\nu^z} \qquad (z \in \mathbb{C},\, \nu \in \mathbb{N}) .$$

Dann ist die Funktionenreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z}$$

auf $M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ punktweise konvergent ([Ü]). Wir definieren $\zeta : M \to \mathbb{C}$ durch

$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z} \qquad (z \in M) .$$

Die Funktion ζ heißt *(Riemann'sche) Zetafunktion.*

3. Es sei $a_\nu(z) := \frac{z^\nu}{\nu!}$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann ist die Funktionenreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$$

punktweise konvergent auf $\mathbb{C}$ (und es ist bekanntlich $e^z = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu/\nu!$).

Das erste Beispiel zeigt insbesondere, dass die Grenzfunktion unstetig (an $x_0 = 1$) ist, obwohl alle Folgelieder f_n stetige Funktionen (und sogar ∞ oft differenzierbar) auf ganz $\mathbb{R}$ sind. Da wir an Aussagen der Form "f_n stetig $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f$ stetig" interessiert sind, führen wir einen "strengeren" Konvergenzbegriff ein, mit dessen Hilfe eine solche Aussage möglich wird.

Definition 11.3 1. Es sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, und es sei (Y, d) ein metrischer Raum.

1. Sind $f_n : X \to Y$ Funktionen $(n \in \mathbb{N})$, so heißt die Funktionenfolge (f_n) *gleichmäßig konvergent* auf der Menge $M \subset X$ (gegen die Grenzfunktion $f : M \to Y$), falls
$$\sup_{x \in M} d(f(x), f_n(x)) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$
(wobei $\sup A := \infty$, falls A nach oben unbeschränkt ist). Wir schreiben dann
$$f_n \to f \qquad (n \to \infty) \quad \text{gleichmäßig auf } M$$
oder auch
$$f_n(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty) \quad \text{gleichmäßig auf } M .$$

2. Eine Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *gleichmäßig konvergent* auf $M \subset X$, falls die Funktionenfolge (s_n) mit $s_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)$ gleichmäßig auf M konvergiert.

Bemerkung 11.4 Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf M, so gilt insbesondere $f_n(x) \to f(x)\,(n \to \infty)$ für alle $x \in M$, d. h. (f_n) konvergiert auf M auch punktweise gegen f ("gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz").
Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon \text{ und alle } x \in M \ .$$

Der Unterschied zur punktweisen Konvergenz liegt darin, dass N_ε unabhängig von x gewählt werden kann. Punktweise Konvergenz bedeutet: Für alle $x \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ mit $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon,x}$.

Beispiel 11.5 Wir betrachten noch einmal $f_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$) (vgl. B. 11.2.1). Ist $M = [-1/2, 1/2]$, so gilt

$$\sup_M |f_n(x) - f(x)| = 1/2^n \to 0 \qquad (n \to \infty) \ .$$

Damit gilt

$$x^n \to 0 \qquad \text{gleichmäßig auf} \quad [-1/2, 1/2] \ .$$

Andererseits ist für $M = [0, 1)$

$$\sup_M |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1)} x^n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Also ist (f_n) nicht gleichmäßig konvergent auf $[0, 1)$.

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für gleichmäßige Konvergenz liefert

Satz 11.6 *(Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)*
Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f_n : X \to Y$ Funktionen $(n \in \mathbb{N})$. Ist $M \subset X$, so ist (f_n) gleichmäßig konvergent auf M genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$\sup_M d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \qquad \textit{für alle}\, n, m \geq N_\varepsilon \ .$$

(sog. gleichmäßige Cauchy-Bedingung).

Beweis. 1. Es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig auf M. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_M d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geq N_\varepsilon) \ .$$

Für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ folgt dann

$$\sup_M d(f_n(x), f_m(x)) \leq \sup_M d(f_n(x), f(x)) + \sup_M d(f(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Also ist die Cauchy-Bedingung erfüllt.

2. Es gelte die Cauchy-Bedingung. Dann ergibt sich insbesondere, dass für jedes feste $x \in M$ die Folge $(f_n(x))_n$ in (Y, d) eine Cauchy-Folge ist, Da (Y, d) vollständig ist, ist $(f_n(x))_n$ konvergent, d. h. es existiert ein $y \in Y$ mit $f_n(x) \to y\,(n \to \infty)$. Wir definieren $f : M \to Y$ durch $f(x) := y\,(x \in M)$ und zeigen: $f_n \to f$ gleichmäßig auf M.
Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n, m \geq N_\varepsilon,\ x \in M)\ .$$

Hieraus folgt für festes $n \geq N_\varepsilon$ und $x \in M$

$$d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ .$$

(Man beachte: Es gilt für $z \in Y$ und (y_m) in Y mit $y_m \to y$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|d(y_m, z) - d(y, z)| \leq d(y_m, y) \to 0 \quad (m \to \infty)\ ,$$

also $d(y_m, z) \to d(y, z)$ für $m \to \infty$.)
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung. □

In S. 6.15 hatten wir als wichtiges hinreichendes Kriterium für (absolute) Konvergenz von Zahlenreihen das Weierstraß'sche Majorantenkriterium kennen gelernt. Ein entsprechendes Ergebnis gibt es für Funktionenreihen.

Satz 11.7 *(Weierstraß'sches Majorantenkriterium)*
Es sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, und es seien $a_\nu : M \to \mathbb{K}$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$. Ferner sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ eine konvergente Reihe mit $b_\nu \geq 0$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$. Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_\nu(x)| \leq b_\nu$ für alle $\nu \geq N$ und $x \in M$, so konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ gleichmäßig auf M.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (o. E. $N_\varepsilon \geq N$) mit

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} b_\nu < \varepsilon \qquad (n > m \geq N_\varepsilon)\ .$$

Also folgt für $n > m \geq N_\varepsilon$ mit $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$

$$\sup_M |s_n(x) - s_m(x)| = \sup_M \Big|\sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu(x)\Big| \leq \sup_M \sum_{\nu=m+1}^{n} |a_\nu(x)| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} b_\nu < \varepsilon\ .$$

Damit ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ gleichmäßig konvergent auf M nach S. 11.6. □

Beispiel 11.8 Für $\alpha > 1$ sei

$$M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \alpha\}$$

und $a_\nu(z) := \frac{1}{\nu^z}$ $(z \in M,\ \nu \in \mathbb{N})$ (vgl. B. 11.2.2). Dann ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ gleichmäßig konvergent auf M.
(Denn: Für alle $z \in M$ und alle $\nu \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_\nu(z)| = \frac{1}{\nu^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{\nu^\alpha}$$

und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha}$ ist konvergent. Also ergibt sich die Behauptung aus S. 11.7.)

Bemerkung 11.9 Ist $M \neq \emptyset$ eine Menge und ist $(E, |\cdot|_E)$ ein normierter Raum, so gilt für zwei Funktionen $f, g \in B(M, E)$ (vgl. B. 7.5)

$$||f - g||_\infty = \sup_M |f(x) - g(x)|_E = \sup_M d_{|\cdot|_E}(f(x), g(x)) \ .$$

Also bedeutet gleichmäßige Konvergenz in diesem Fall Konvergenz bezüglich der sup-Norm $||\cdot||_\infty$*, d. h. der Metrik* $d_{||\cdot||_\infty}$*).*
Ist E ein Banachraum (also $(E, |\cdot|_E)$ vollständig), so ergibt sich aus S. 11.6 leicht, dass der Raum $(B(M, E), ||\cdot||_\infty)$ auch ein Banachraum ist.
(Denn: Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $B(M, E)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_M |f_n(x) - f_m(x)|_E = ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \quad (n, m \geq N_\varepsilon) \ .$$

Nach S. 11.6 existiert eine Funktion $f : M \to E$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf M, d. h. $||f - f_n||_\infty \to 0$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $f \in B(M, E)$ d. h. f beschränkt ist. Dazu wählen wir zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$||f(x) - f_N(x)||_\infty < 1 \ .$$

Dann gilt für alle $x \in M$

$$|f(x)|_E \leq |f(x) - f_N(x)|_E + |f_N(x)|_E \leq 1 + ||f_N||_\infty$$

und damit ist f beschränkt.)

Wir kommen nun zu dem bereits oben angedeuteten Ergebnis über die "Vererbung" der Stetigkeit auf die Grenzfunktion.

Satz 11.10 *Es seien* (X, d) *und* (Y, e) *metrische Räume, und es seien* $f_n : X \to Y$ *Funktionen. Dann gilt: Sind alle Funktionen* f_n *stetig an der Stelle* $x_0 \in X$ *und existiert eine Umgebung* U *von* x_0 *mit* $f_n \to f$ *gleichmäßig auf* U*, so ist auch die Grenzfunktion* $f : U \to Y$ *stetig an* x_0*.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f auf U existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$e(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3 \qquad (n \geq N,\ x \in U) .$$

Da f_N stetig an x_0 ist, existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass

$$e(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon/3 \qquad \text{für alle } x \text{ mit } d(x, x_0) < \delta_\varepsilon .$$

Dabei können wir δ_ε so wählen, dass $U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \subset U$ gilt. Für alle x mit $d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} e(f(x), f(x_0)) &\leq e(f(x), f_N(x)) + e(f_N(x), f_N(x_0)) + e(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon . \end{aligned}$$

Folglich ist f stetig an x_0. □

Bemerkung 11.11 Natürlich läßt sich die Aussage von S. 11.10 sofort auf Funktionenreihen übertragen, indem man den Satz auf die Teilsummenfolge (s_n) anwendet.

Beispiel 11.12 (vgl. B. 11.2.2 und B. 11.8)
Ist $\alpha > 1$, so gilt

$$\zeta(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z}$$

gleichmäßig auf $M_\alpha := \{z : \operatorname{Re} z > \alpha\}$. Da $z \to 1/\nu^z$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ stetig auf $\mathbb{C}$ ist, ist ζ stetig auf M_α nach B. 11.11 (man beachte: M_α ist offen, also Umgebung eines jeden Punktes in M_α). Damit ist ζ auch stetig auf

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\} = \bigcup_{\alpha > 1} M_\alpha .$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, unter welchen Voraussetzungen an ein Funktionenfolge man "lim" und Differenziation vertauschen kann, d. h. der Frage, wann

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$$

gilt.

Beispiel 11.13 Wir betrachten $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \qquad (x \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N}) .$$

Dann gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad (n \to \infty) ,$$

also

$$f_n \to f \equiv 0 \qquad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R} .$$

Weiter erhalten wir

$$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos(nx) \qquad (n \in \mathbb{N} ,\ x \in \mathbb{R})$$

also gilt etwa für $x = \pi$:

$$f_n'(\pi) = (-1)^n \sqrt{n}$$

d. h . $(f_n'(\pi))_n$ ist divergent. Insbesondere gilt **nicht** für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x) \equiv 0$$

(obwohl die Grenzfunktion $f \equiv 0$ überall differenzierbar ist).
Also: Aus $f_n \to f$ gleichmäßig auf M und f_n, f differenzierbar auf M folgt i. A. **nicht** $f_n' \to f'$ auf M.

Anders verhält sich die Sache, wenn die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert.

Satz 11.14 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und die Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf I. Ferner sei (f_n) punktweise konvergent auf I und (f_n') gleichmäßig konvergent auf I. Dann ist die Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I mit*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (x \in I) .$$

Beweis. Es sei $x_0 \in I$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ sei

$$g_n(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & , \text{ falls } \ x \neq x_0 \\ f_n'(x_0) & , \text{ falls } \ x = x_0 \end{cases} .$$

Wir zeigen: (g_n) ist gleichmäßig konvergent auf I.
(Denn: Für alle $x \in I$, $x \neq x_0$, ist nach dem Mittelwertsatz mit einem $\xi = \xi_{n,m,x} \in I$

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} = (f_n' - f_m')(\xi)$$

und außerdem ist

$$g_n(x_0) - g_m(x_0) = f_n'(x_0) - f_m'(x_0)$$

Also gilt

$$\sup_I |g_n(x) - g_m(x)| \leq \sup_I |f_n'(y) - f_m'(y)| \ .$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n') ergibt sich mit S. 11.6 die gleichmäßige Konvergenz von (g_n). Es sei

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad (x \in I) \ .$$

Für $x \neq x_0$ gilt

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Weiter ist g_n auf Grund der Differenzierbarkeit von f_n an x_0 stetig an x_0. Also ist auch g nach S. 11.10 stetig an x_0, d. h.

$$g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Damit ist f differenzierbar an x_0 mit $f'(x_0) = g(x_0)$. Aus der Konvergenz von (g_n) gegen g ergibt sich schließlich

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0) = f'(x_0) \ .$$

Da $x_0 \in I$ beliebig war, ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 11.15 Natürlich lassen sich die Aussagen von S. 11.14 sofort auf Funktionenreihen übertragen, indem man die entsprechenden Ergebnisse auf die Teilsummenfolge (s_n) anwendet.
So gilt etwa für $a_\nu(x) = \frac{1}{\nu^x} \quad (x > 1)$

$$a_\nu'(x) = \left(\frac{1}{\nu^x}\right)' = -\frac{\ln \nu}{\nu^x} \qquad (x > 1, \ \nu \in \mathbb{N}) \ .$$

Ist $\alpha > 1$, so gilt für $\beta := \frac{\alpha+1}{2}$ und $x \geq \alpha$ sowie $\nu \geq \nu_0(\alpha)$

$$\frac{\ln \nu}{\nu^x} \leq \frac{\ln \nu}{\nu^\alpha} \leq \frac{\nu^{\frac{\alpha-1}{2}}}{\nu^\alpha} = \frac{1}{\nu^\beta} \ .$$

Also konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu'$ nach S. 11.7 gleichmäßig auf $[\alpha, \infty)$. Da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (punktweise) auf $(1, \infty)$ konvergiert, ist $\zeta(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x}$ differenzierbar auf (α, ∞) und es gilt

$$\zeta'(x) = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x}\right)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu^x}\right)' = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\ln \nu}{\nu^x} \quad (x > \alpha) \ .$$

Da $\alpha > 1$ beliebig war, gilt dies für alle $x > 1$.

Wir beweisen zum Abschluss noch folgendes interessante Ergebnis

Satz 11.16 *Es existiert eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion, die nirgends differenzierbar ist.*

Beweis. Wir definieren $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) := |x|$ für $x \in [-1, 1]$ und ansonsten durch 2-periodische Fortsetzung. Dann gilt offenbar

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq |t - s| \qquad (t, s \in \mathbb{R}) .$$

Damit setzen wir

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

Aus

$$\left| \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf $\mathbb{R}$ (S. 11.7). Da die einzelnen Reihenglieder stetig auf $\mathbb{R}$ sind, ist auch f stetig auf $\mathbb{R}$ nach S. 11.10.
Nun sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\delta_m := \pm \frac{1}{2} \frac{1}{4^m}$$

wobei das Vorzeichen so gewählt ist, dass zwischen $4^m x$ und $4^m(x + \delta_m)$ keine ganze Zahl liegt. Wir betrachten

$$\gamma_n := \frac{\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m} \qquad (n \in \mathbb{N}_0) .$$

Für $n > m$ ist $\gamma = 0$, da $4^n \delta_m$ eine gerade ganze Zahl ist. Für $n \leq m$ ist $|\gamma_n| \leq 4^n$ und für $n = m$ ist $\gamma_m = 4^m$. Damit gilt

$$\left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| = \left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m + 1) \to \infty \quad (m \to \infty) .$$

Also ist f nicht differenzierbar an x. $\square$

12 Potenzreihen

Wir untersuchen jetzt eine Klasse besonders wichtiger Funktionenreihen, sog. Potenzreihen. Hier sind die Teilsummen s_n Polynome vom Grad $\leq n$, also von besonders einfacher Struktur.

Definition 12.1 1. Es sei $z_0 \in \mathbb{K}$ und es sei $(a_\nu)_{\nu=0}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt die Funktionenreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ (also die Funktionenfolge (s_n) gegeben durch $s_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu (z-z_0)^\nu$) auf $\mathbb{K}$ eine *Potenzreihe* (mit der *Entwicklungsmitte* z_0 und der *Koeffizientenfolge* (a_ν)).

2. Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe, so heißt

$$R := 1/\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \in [0, \infty]$$

Konvergenzradius der Potenzreihe (wobei $1/\infty := 0$ und $1/0 := \infty$ gesetzt ist). Im Falle $R > 0$ heißt weiterhin

$$U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < R\}$$

Konvergenzkreis (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ meist *Konvergenzintervall*) der Potenzreihe (wobei $U_\infty(z_0) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < \infty\} = \mathbb{K}$ ist).

Beispiel 12.2 1. Für die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ (also die geometrische Reihe) gilt $z_0 = 0$ und $a_\nu \equiv 1$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$, also ist $R = 1$. Hier konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ absolut im Konvergenzkreis $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ und divergiert für alle z mit $|z| > 1$. Ferner gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1) .$$

2. Für die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ ist $z_0 = 0$ und $a_\nu = \frac{1}{\nu!}$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$. Hier ist $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} |a_\nu|^{1/\nu} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu!}} = 0$ (warum?), d. h. $R = \infty$. Bekanntlich konvergiert die Potenzreihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} = e^z .$$

Über das Konvergenzverhalten allgemeiner Potenzreihen gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 12.3 *(Cauchy-Hadamard)*
Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R. *Dann gilt:*

1. *Ist* $R=\infty$ *so konvergiert die Potenzreihe absolut für alle* $z \in \mathbb{K} = U_\infty(z_0)$.

2. *Ist* $0 < R < \infty$, *so konvergiert die Potenzreihe absolut für alle* $z \in U_R(z_0)$ *und divergiert für alle* $z \in \mathbb{K}$ *mit* $|z-z_0| > R$ *(d.h. für alle* $z \in \overline{U_R(z_0)}^c$*).*

3. *Ist* $R=0$, *so divergiert die Potenzreihe für alle* $z \in \mathbb{K} \setminus \{z_0\}$.

Beweis. Es gilt für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$|a_\nu (z-z_0)^\nu|^{1/\nu} = |a_\nu|^{1/\nu} \cdot |z-z_0| \,,$$

also ist im Falle $a < \infty$

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} |a_\nu (z-z_0)^\nu|^{1/\nu} = a \cdot |z-z_0| \,.$$

Damit ergeben sich 1. und 2. sofort aus dem Wurzelkriterium (S. 6.17).
Ist $a=\infty$, so ist für $z \neq z_0$ auch $(|a_\nu(z-z_0)^\nu|^{1/\nu} = |a_\nu|^{1/\nu}|z-z_0|)_\nu$ unbeschränkt und folglich ist $(a_\nu(z-z_0)^\nu)_\nu$ insbesondere keine Nullfolge. Damit ergibt sich auch 3. $\square$

Bemerkung 12.4 Man kann zeigen ([Ü]): Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge des Konvergenzkreises $U_R(z_0)$.
I. A. liegt jedoch keine gleichmäßige Konvergenz auf $U_R(z_0)$ vor: Wir betrachten dazu noch einmal die geometrische Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$. Es gilt

$$\sup_{|z|<1} |s_n(z) - s_{n-1}(z)| \geq \sup_{0<x<1} s_n(x) - s_{n-1}(x) = \sup_{0<x<1} x^n = \lim_{x\to 1^-} x^n = 1 \,.$$

Also kann nach dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz nicht gleichmäßig auf dem Konvergenzkreis $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ sein.

Wir zeigen nun, dass Funktionen, die durch Potenzreihen definiert sind, stets besonders gute Glattheitseigenschaften haben.

Satz 12.5 *Es sei* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$, *und es sei* $A(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$. *Dann existieren die Ableitungen* $A^{(k)}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *im Konvergenzkreis* $U_R(z_0)$ *und es gilt*

$$A^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k) a_{\nu+k}(z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)) .$$

Insbesondere ist

$$k! a_k = A^{(k)}(z_0) \qquad (k \in \mathbb{N}_0) ,$$

also

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)) .$$

Beweis. 1. Wir zeigen: A ist differenzierbar auf $U_R(z_0)$ und

$$A'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu (z-z_0)^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) a_{\nu+1}(z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)) .$$

O. E. können wir $z_0 = 0$ annehmen.
Es sei $z_1 \in U_R(0)$ fest. Für $z \in U_R(0)$ gilt

$$A(z) - A(z_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z^\nu - z_1^\nu) = (z - z_1) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \underbrace{\sum_{k=0}^{\nu-1} z_1^k z^{\nu-1-k}}_{=: \phi_\nu(z)} .$$

Wir wählen ein $r \in (|z_1|, R)$ und setzen $\delta := r - |z_1|$. Ist $|z - z_1| < \delta$, so ist $|z| < r$ (und $|z_1| < r$), also $|\phi_\nu(z)| \le \nu r^{\nu-1}$. Aus $\nu^{1/\nu} \to 1$ $(\nu \to \infty)$ folgt, dass auch die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^\nu$ den Konvergenzradius R hat. Insbesondere konvergiert damit $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu| r^{\nu-1}$ nach dem Satz von Cauchy-Hadamard. Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (S. 11.7) konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \phi_\nu(z)$ gleichmäßig auf $U_\delta(z_1)$. Folglich ist $\phi(z) := \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \phi_\nu(z)$ stetig an z_1 (S. 11.10), d. h. es gilt

$$\lim_{z \to z_1} \frac{A(z) - A(z_1)}{z - z_1} = \lim_{z \to z_1} \phi(z) = \phi(z_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z_1^{\nu-1} .$$

2. Durch Anwendung der gleichen Argumentation auf A' sieht man: A' ist differenzierbar auf $U_R(z_0)$ und

$$A''(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2) a_{\nu+2}(z-z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0)) .$$

Induktiv erhält man: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $A^{(k-1)}$ differenzierbar auf $U_R(z_0)$ und

$$A^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)a_{\nu+k}(z-z_0)^\nu .$$

Die Zusatzbehauptung $k!a_k = A^{(k)}(z_0)$ ergibt sich für $z = z_0$. □

Beispiel 12.6 1. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & , \ z \neq 0 \\ \\ 1 & , \ z = 0 \end{cases}$$

ist beliebg oft differenzierbar auf $\mathbb{C}$. Insbesondere folgt damit die Stetigkeit an der Stelle 0, d.h.

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

(Denn: Es gilt für $z \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$$

und für $z = 0$

$$f(0) = 1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu 0^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$$

Also ist nach S. 12.5 f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{C}$.)

2. Für die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} z^\nu}{\nu}$ gilt

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} |a_\nu|^{1/\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}} = 1 ,$$

d. h. $R = 1$. Also konvergiert die Potenzreihe absolut in ihrem Konvergenzkreis $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ und divergiert für alle $|z| > 1$. Wir setzen für $|z| < 1$

$$A(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} z^\nu}{\nu}$$

Dann ist nach S. 12.5

$$A'(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu z^\nu \ (= \frac{1}{1+z})$$

d.h. insbesondere $A'(x) - 1/(1+x) \equiv 0$ auf $(-1, 1)$. Weiter ist

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \qquad (x \in (-1, \infty)) .$$

Folglich ist nach B. 10.18 $A(x) - \ln(1+x)$ konstant auf $(-1,1)$. Da $A(0) = 0 = \ln(1)$ gilt, ergibt sich

$$\ln(1+x) = A(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} x^\nu}{\nu} \qquad (x \in (-1,1)) \; .$$

Am Rande ihres Konvergenzkreises können Potenzreihen ein sehr kompliziertes Verhalten zeigen. Da ist es schon sehr beruhigend, ggfs. auf folgendes Resultat zurückgreifen zu können. (Die Beschränkung auf die Entwicklungsmitte $z_0 = 0$ ist dabei unwesentlich.)

Satz 12.7 *(Abelscher Grenzwertsatz)*
Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \in (0,\infty)$. *Ferner sei für ein* $\zeta \in \partial U_R(0)$ *(d.h.* $|\zeta| = R$*) die Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu$ *konvergent. Ist*

$$A(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad (|z| < 1) \; ,$$

so gilt

$$\lim_{r \to 1^-} A(r\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu \; .$$

Beweis. Es sei ohne Einschränkung $R = 1$ und $\zeta = 1$ (ansonsten betrachte man $\tilde{A}(z) := A(\zeta z)$). Wir setzen

$$s := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \; , \quad s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \; .$$

Da (nach S. 12.3) für $|z| < 1$ die Potenzreihen

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$$

beide absolut konvergieren, gilt nach S. 6.22

$$\begin{aligned} A(z) \cdot \frac{1}{1-z} &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu \; , \end{aligned}$$

d. h.

$$A(z) = (1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu \; .$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Wegen $1 = (1-r)\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} r^\nu$ erhalten wir für $0 < r < 1$

$$\begin{aligned} |A(r) - s| &= |(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}(s_\nu - s)r^\nu| \leq \\ &\leq (1-r)\sum_{\nu=0}^{N-1}|s_\nu - s|r^\nu + \frac{\varepsilon}{2}(1-r)\sum_{\nu=N}^{\infty} r^\nu \\ &\leq (1-r)\sum_{\nu=0}^{N-1}|s_\nu - s|r^\nu + \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Weiter existiert ein $\delta = \delta(N_\varepsilon) > 0$ so, dass

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{N-1}|s_\nu - s| < \varepsilon/2$$

für alle r mit $1 - \delta < r < 1$. Also gilt

$$|A(r) - s| < \varepsilon \qquad \text{für} \qquad 1 - \delta < r < 1\,.$$

□

Der Abelsche Grenzwertsatz hat verschiedene interessante Anwendungen. U. A. kann er dazu genutzt werden, Summen gewisser konvergenter Reihen zu berechnen.

Beispiel 12.8 1. Nach B. 12.6.2 gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\nu} \qquad (-1 < x < 1)\,.$$

Außerdem konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}$ nach dem Leibnizkriterium . Also erhalten wir mit dem Abelschen Grenzwertsatz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} = \lim_{x\to 1^-}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\nu} = \lim_{x\to 1^-}\ln(1+x) = \ln(2)\,.$$

2. Wir betrachten die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1}$ mit Konvergenzradius 1. Ist

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} \qquad (|z| < 1)\,,$$

so sieht man ähnlich wie in B. 12.6.2 ([Ü])

$$\arctan x = A(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} \qquad (-1 < x < 1)\,.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, ergibt sich aus dem Abelschen Grenzwertsatz

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} = \lim_{x \to 1^-} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \, .$$

13 Integralrechnung von Funktionen einer reellen Veränderlichen

Die Integralrechnung entstand ursprünglich aus der Frage nach Berechnung von Flächeninhalten. Ähnlich wie bei der Differenzialrechnung werden wir Integrale über einen gewissen Grenzprozess definieren. Dazu betrachten wir zunächst besonders einfache Funktionen, für die wir die "Fläche unter den Graphen" sehr leicht definieren können.

Definition 13.1 Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

1. Sind $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, so heißt
$$Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$
eine Zerlegung von $[a, b]$.

2. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn eine Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ existieren mit
$$\varphi(x) \equiv c_j \qquad (x \in (x_{j-1}, x_j),\, j = 1, \ldots, n)\ . \tag{13.1}$$
(Die Funktionswerte an den Stellen x_j spielen keine Rolle). Eine Zerlegung Z so, dass Konstanten c_j wie in (13.1) existieren, heißt *zulässig* für φ.

Definition 13.2 Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion wie in D. 13.1.2, so setzen wir
$$\int_a^b \varphi := \int_a^b \varphi(x)\, dx := \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1})\ .$$
Die Zahl $\int_a^b \varphi(x)dx$ heißt *Integral* von φ (auf $[a, b]$).

!! Wichtig bei dieser Definition: Für eine Treppenfunktion φ gibt es verschiedene zulässige Zerlegungen. Damit $\int_a^b \varphi$ wohldefiniert ist, muss die Summe $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1})$ von der Zerlegung unabhängig sein. Man überlegt sich leicht, dass dies der Fall ist ([Ü]). Ist etwa
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x \le 1/2 \\ 1 & , \quad 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$
so ist $Z = \{0, 1/2, 1\}$ eine zulässige Zerlegung mit $c_1 = 0\ ,\ c_2 = 1$, und es gilt
$$\int_0^1 \varphi = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 1/2\ .$$

Eine weitere zulässige Zerlegung ist $\{0, 1/2, 3/4, 1\}$ mit $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 1$. Hierfür gilt auch

$$\int_0^1 \varphi = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} .$$

Satz 13.3 *Sind $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{K}$ Treppenfunktionen, und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so gilt*

1. $\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_a^b \varphi + \beta \int_a^b \psi.$
2. *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\varphi \le \psi$ (d. h. $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$), so ist*
$$\int_a^b \varphi \le \int_a^b \psi .$$
3. *$|\varphi|$ ist eine Treppenfunkton und es gilt*
$$\left| \int_a^b \varphi \right| \le \int_a^b |\varphi| \le (b - a)||\varphi|| .$$
(Dabei ist $||\varphi|| := ||\varphi||_\infty = \sup \{|\varphi(x)| : x \in [a, b]\}$.)

Beweis. 1. Es seien Z_1 bzw. Z_2 zulässige Zerlegungen für φ bzw. ψ. Dann ist $Z_1 \cup Z_2$ sowohl für φ als auch für ψ zulässig. Ist $Z_1 \cup Z_2 = \{x_0, \dots, x_n\}$ und sind $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ bzw. $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$ wie in (13.1) für φ bzw. ψ, so gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha\varphi + \beta\psi &= \sum_{j=1}^n [\alpha c_j(x_j - x_{j-1}) + \beta d_j(x_j - x_{j-1})] = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}) + \beta \sum_{j=1}^n d_j(x_j - x_{j-1}) = \\ &= \alpha \int_a^b \varphi + \beta \int_a^b \psi . \end{aligned}$$

Die Aussagen 2. und 3. ergeben sich ähnlich aus einfachen Eigenschaften von Summen. □

Wir werden nun allgemeinere Funktionen betrachten, die sich in geeigneter Weise durch Treppenfunktionen annähern lassen. Für diese Funktionen können wir dann das Integral (als "Fläche unter dem Graphen") über die Integrale dieser Treppenfunktionen definieren.

Definition 13.4 Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es sei $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Dann heißt f *Regelfunktion*, falls eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen existiert mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Weiter setzen wir

$$R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : f \text{ Regelfunktion}\} .$$

Bemerkung 13.5 Aus D. 13.4 ergeben sich leicht folgende Eigenschaften:
1. Es gilt: f ist genau dann eine Regelfunktion, wenn eine Folge von Treppenfunktion φ_n existiert mit

$$||\varphi_n - f||_\infty \to 0 .$$

(vgl. B. 11.9). Insbesondere ist jedes $f \in R[a,b]$ beschränkt auf $[a,b]$.
2. Sind f, g Regelfunktionen und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so sind auch $\alpha f + \beta g$ sowie $f \cdot g$ Regelfunktionen (d. h. $R[a,b]$ ist eine sog. Funktionenalgebra).
(Denn: Sind (φ_n) und (ψ_n) Folgen von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$, so gilt

$$||\alpha f + \beta g - (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)|| \leq |\alpha| \cdot ||f - \varphi_n|| + |\beta| \cdot ||g - \psi_n|| \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

Da aus $||\psi_n - g|| \to 0$ die Beschränktheit von $(||\psi_n||)_n$ folgt, gilt weiter

$$||fg - \varphi_n\psi_n|| \leq ||\psi_n|| \cdot ||f - \varphi_n|| + ||f|| \cdot ||g - \psi_n|| \to 0 \quad (n \to \infty).)$$

3. Ist $f \in R[a,b]$ und ist $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ so, dass $f(x) = g(x)$ für fast alle x (d.h. bis auf endlich viele), so ist auch $g \in R[a,b]$.
4. Ist $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so ist $f \in R[a,b]$ genau dann, wenn $f \in R[x_{j-1}, x_j]$ für $j = 1, \ldots, n$.

Wir zeigen nun, dass insbesondere stetige Funktionen Regelfunktionen sind.

Satz 13.6 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ stetig. Mit $x_j^{(n)} := a + j(b-a)/n$ $(j = 0, \ldots, n)$ ist durch*

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} f(x_{j-1}^{(n)}) & , \quad x \in [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}),\ j = 1, \ldots, n \\ f(b) & , \quad x = b \end{cases}$$

eine Folge von Treppenfunktionen φ_n definiert mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Insbesondere ist also $f \in R[a,b]$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ ist, existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x}| < \varepsilon$ für alle $x, \tilde{x}$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta_\varepsilon$. Weiter existiert ein N_ε so, dass $(b-a)/n < \delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ (dann ist auch $x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)} < \delta_\varepsilon$ für $j = 1, \ldots, n$ und $n \geq N_\varepsilon$).

Ist also $n \geq N\varepsilon$ und $x \in [a, b)$, so gilt für $j = j_n$ so dass $x \in [x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)})$

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(x_{j-1}^{(n)})| < \varepsilon \, .$$

Mit $f(b) = \varphi_n(b)$ ergibt sich daher

$$||f - \varphi_n||_\infty \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon) \, .$$

$\square$

Bemerkung und Definition 13.7 1. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ nennen wir *stückweise stetig*, falls eine Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$ so existiert, dass $f_{|(x_{j-1}, x_j)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ stetig ist und alle rechts- und linksseitigen Grenzwerte $f(x_{j-1}^+)$ und $(f(x_j^-)$ existieren.
Dann ist f eine Regelfunktion.
(Denn: $f_{|(x_{j-1}, x_j)}$ ist durch $f(x_{j-1}^+)$ und $f(x_j^-)$ stetig fortsetzbar auf $[x_{j-1}, x_j]$. Also ist $f \in R[x_{j-1}, x_j]$ nach S. 13.6 und B. 13.5.3. Mit B. 13.5.4. ergibt sich die Behauptung.)

2. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton (wachsend oder fallend), so ist f eine Regelfunktion ([Ü]).

Bemerkung und Definition 13.8 Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ eine Regelfunktion, und es sei (φ_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a, b]$. Wir setzen

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \, .$$

Dann heisst $\int_a^b f$ das *Integral* von f auf $[a, b]$.
!! Damit dies eine sinnvolle Definition ist, müssen zwei Dinge sichergestellt werden:

1. Der Grenzwert muss existieren.

2. Er hängt nicht von der Wahl der approximierenden Fuktionen (φ_n) ab.

Beides ist erfüllt:
Zu 1.: Es gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ nach S. 13.3.3

$$\left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi_m \right| \leq (b - a)||\varphi_n - \varphi_m|| \, .$$

Da (φ_n) eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $[a, b]$ ist, ist auch $(\int_a^b \varphi_n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, also konvergent.

Zu 2.: Ist (ψ_n) eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\psi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$, so gilt

$$\left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n \right| \leq (b-a)||\varphi_n - \psi_n|| \leq (b-a)[||\varphi_n - f|| + ||f - \psi_n||] \to 0 \,.$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \,.$$

Beispiel 13.9 Wir betrachen $f(x) = x$ auf $[0,1]$. Dann ist nach S. 13.6 durch

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{j-1}{n} & , \quad x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}),\ j = 1, \ldots, n \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

eine Folge von Treppenfunktionen auf $[0,1]$ gegeben mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Es gilt

$$\int_0^1 \varphi_n = \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)\,,$$

also ist

$$\int_0^1 f(x)dx = 1/2.$$

Wir stellen einige Rechenregeln zusammen, die sich mehr oder weniger unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen ergeben.

Satz 13.10 *Es seien $f, g \in R[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt*

1. $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$
2. *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $f \leq g$ auf $[a,b]$, so ist*
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \,.$$
3. *$|f|$ ist eine Regelfunktion und*
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a)||f||$$

Beweis. Es seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

1. Dann gilt $\alpha\varphi_n + \beta\psi_n \to \alpha f + \beta g$ gleichmäßig auf $[a, b]$ und deshalb

$$\int_b^a \alpha f + \beta g = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \, .$$

2. Hier sind φ_n und ψ_n reellwertig. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n^- & := & \varphi_n - ||f - \varphi_n|| \\ \psi_n^+ & := & \psi_n + ||g - \psi_n|| \end{array} \, .$$

Dann sind φ_n^-, ψ_n^+ Treppenfunktionen mit $\varphi_n^- \leq f \leq g \leq \psi_n^+$ sowie

$$||f - \varphi_n^-|| \to 0 \qquad \text{und} \qquad ||g - \psi_n^+|| \to 0 \, .$$

Also folgt mit S. 13.3.2

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n^- \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n^+ = \int_a^b g \, .$$

3. Aus $||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)|$ folgt, dass auch $|f|$ eine Regelfunktion ist. Es sei $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| = 1$ und so, dass $u \cdot \int_a^b f \geq 0$ gilt (ist $\int_a^b f = re^{i\varphi}$, so ist $u = e^{-i\varphi}$ geeignet). Mit 2. ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &= u \cdot \int_a^b f(x)dx = \mathrm{Re} \int_a^b uf(x)dx + i\mathrm{Im} \int_a^b uf(x)dx = \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(uf(x))dx \leq \int_a^b |uf(x)|dx = \int_a^b |f(x)| \leq (b-a)||f|| \, . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 13.11 Ist $f \in R[a, b]$ so gilt natürlich auch $f \in R[x, y]$ für $a \leq x < y \leq b$. Damit existiert auch $\int_x^y f$. Wir setzen noch

$$\int_x^x f := 0 \qquad \text{und} \qquad \int_y^x f := -\int_x^y f$$

Damit gilt ([Ü]) für $x, y, z \in [a, b]$

$$\int_x^y f + \int_y^z f = \int_x^z f \;.$$

Wir kommen zu einem der zentralen Sätze der Analysis, der die Beziehung zwischen der Differenzial- und der Integralrechnung herstellt.

Satz 13.12 *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Teil 1)*
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f \in R[a, b]$.

1. *Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{K}$ mit*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a, b])$$

   ist stetig auf $[a, b]$.

2. *Ist f stetig an der Stelle $x_0 \in [a, b]$, so ist F differenzierbar an x_0 mit*

$$F'(x_0) = f(x_0) \;.$$

Beweis. 1. Nach B. 13.5 ist f beschränkt, d. h. $||f|| < \infty$. Nach S. 13.10.3 und 4. gilt für $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq ||f||(y - x) \;.$$

Insbesondere ist F stetig auf $[a, b]$.

2. Es sei f stetig an x_0 und (x_n) eine Folge in $[a, b]$ mit $x_n \to x_0, x_n \neq x_0$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für alle n mit $|x_n - x_0| < \delta$ gilt dann (beachte: $f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)dt$)

$$\left| \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} \Big(f(t) - f(x_0) \Big) dt \right| \leq \frac{|x_n - x_0|}{|x_n - x_0|} \varepsilon = \varepsilon \;.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Wir wollen nun verschiedene Techniken zur Berechnung von Integralen herleiten. Wichtig ist dabei der Begriff der Stammfunktion.

Definition 13.13 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und es sei $f : I \to \mathbb{K}$. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{K}$ heißt (*verallgemeinerte*) *Stammfunktion* von f (auf $[a, b]$), falls F stetig ist und falls $F' = f$ für fast alle $x \in I$ (also bis auf endlich viele) gilt.
Man beachte dabei: Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen zu f, so exstiert ein $c \in \mathbb{K}$ mit $F_1(x) = F_2(x) + c$ für alle $x \in [a, b]$, d. h. zwei Stammfunktionen unterscheiden sich lediglich durch eine additive Konstante.
Wir schreiben auch

$$x \mapsto \int f(x)dx$$

(*unbestimmtes Integral*) für eine Stammfunktion (oder auch die Gesamtheit aller Stammfunktionen) von f.

Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (kurz HDI) zeigt, dass Integrale – unter geeigneten Voraussetzungen – durch Bestimmung einer Stammfunktion berechnet werden können:

Satz 13.14 *(HDI, Teil 2)*
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ stückweise stetig, so hat f eine Stammfunktion auf $[a, b]$. Außerdem gilt dann: Ist Φ eine beliebige Stammfunktion zu f, so ist

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (=: \Phi(x)|_a^b =: \Phi|_a^b)\ . \tag{13.2}$$

Beweis. 1. Nach S. 13.12 ist F (wie dort definiert) eine Stammfunktion zu f.
Es sei Φ eine beliebige Stammfunktion zu f. Dann gilt $\Phi(x) = F(x) + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{K}$. Damit ist

$$\int_a^b f = F(b) = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)\ .$$

□

Beispiel 13.15 1. Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$. Dann gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = f(x) \qquad (x > 0)\ .$$

Also ist

$$\ln x = \int \frac{1}{x}\, dx \qquad (x > 0)\ .$$

Nach dem HDI gilt für $0 < a < b < \infty$:

$$\int_a^b f = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln x|_a^b = \ln(b) - \ln(a) \qquad \left(= \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) .$$

2. Es sei $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ fest ist. Dann gilt

$$\left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha = f(x) \qquad (x > 0) ,$$

also ist

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (x > 0)$$

und folglich für $0 < a < b < \infty$

$$\int_a^b x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}|_a^b = \frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) .$$

Im Falle $\alpha \geq 0$ gilt dies auch für $a = 0$.
3. Ist $f(x) = \mathrm{sign}(x)$ auf $I = \mathbb{R}$, so ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = |x|$ eine (verallgemeinerte) Stammfunktion zu f (denn F ist stetig auf $\mathbb{R}$ und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$)

Bemerkung 13.16 Hat f eine Stammfunktion auf $[a, b]$, so gilt i. A. noch **nicht** $f \in R[a, b]$!
Ist etwa

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

so ist F differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$f(x) := F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x^2) - 2\cos(1/x^2)/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

Also ist F eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}$, aber f ist keine Regelfunktion auf $[0, 1]$ (beachte: f ist unbeschränkt auf $[0, 1]$).

Durch Übertragung der Produkt- und der Kettenregel ergeben sich wichtige Techniken zur möglichen Berechnung von Integralen. Wir bemerken zunächst:
Sind $f, g : I \to \mathbb{K}$ und sind F bzw. G Stammfunktionen zu f bzw. g auf I, so gilt mit der Produktregel

$$(FG)'(x) = (fG)(x) + (Fg)(x) \quad \text{für fast alle } x \in I ,$$

also ist

$$(FG)(x) = \int f(x)G(x) + F(x)g(x)\, dx \qquad \text{auf } I. \tag{13.3}$$

Als Konsequenz erhalten wir

Satz 13.17 *(partielle Integration)*
Sind f und $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ stückweise stetig, und sind F und G zugehörige Stammfunktionen, so gilt

$$\int_a^b fG = FG|_a^b - \int_a^b Fg\,.$$

Beweis. Mit f, g sind auch fG, Fg und $fG+Fg$ stückweise stetig. Also gilt mit (13.3) und S. 13.14

$$\int_a^b fG + \int_a^b Fg = \int_a^b (fG+Fg) = FG|_a^b\,.$$

□

Beispiel 13.18 1. Für $\alpha \neq -1$ und $0 < a < b$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^\alpha \ln x\; dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln x|_a^b - \frac{1}{\alpha+1}\int_a^b x^\alpha\; dx = \\
&= \frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1}\ln b - a^{\alpha+1}\ln a - \frac{1}{\alpha+1} b^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} a^{\alpha+1}\right)
\end{aligned}$$

oder auch kurz mit unbestimmter Integration

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha \ln x\; dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha\; dx = \\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) \qquad \text{auf } (0,\infty)
\end{aligned}$$

2. Es gilt auf $(-1,1)$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\; dx &= \int 1\cdot\sqrt{1-x^2}\; dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\; dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\; dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\; dx\,,
\end{aligned}$$

also (übrigens auch auf $[-1.1]$)

$$\int \sqrt{1-x^2}\; dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$$

Mit Hilfe der Kettenregel sieht man: Ist F eine Stammfunktion zu f auf einem Intervall J und ist $t : I \to J$ eine Stammfunktion (zu t'), so gilt

$$(F \circ t)'(x) = F'(t(x))t'(x) = f(t(x))t'(x)$$

für fast alle $x \in I$ (und $F \circ t$ ist stetig auf I) , also

$$\int f(t(x))t'(x)dx = F(t(x)) = \int f(t)dt_{|t=t(x)} \tag{13.4}$$

Für bestimmte Integration erhalten wir entsprechend

Satz 13.19 *(Substitutionsregel)*
Es sei $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ stetig. Weiter sei $t : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ stückweise stetig differenzierbar (d.h t ist stetig und $t'(x)$ existiert bis auf endlich viele x und ist stückweise stetig fortsetzbar auf $[a, b]$). Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(t(x))t'(x)\,dx = \int\limits_{t(a)}^{t(b)} f\ .$$

Beweis. Es sei F so, dass $F' = f$ auf $[\alpha, \beta]$ (existiert nach S. 13.14). Da $(f \circ t)t'$ stückweise stetig auf $[a, b]$ ist, gilt nach (13.4) und S. 13.14 (man beachte: (13.2) gilt auch, falls $t(a) \geq t(b)$ ist)

$$\int\limits_{t(a)}^{t(b)} f = F(t(b)) - F(t(a)) = \int\limits_a^b f(t(x))t'(x)\,dx\ .$$

$\square$

Beispiel 13.20 1. Es gilt auf $(-1, 1)$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{t=x^2}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t}}_{|t=x^2} = -2\sqrt{1-t}_{|t=x^2} = -2\sqrt{1-x^2}\ .$$

Weiter erhält man für $-1 < a < b < 1$ mit $t(x) = x^2$

$$\int\limits_a^b \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_{a^2}^{b^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -2\sqrt{1-t}\Big|_{a^2}^{b^2} = 2\left(\sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}\right)$$

2. Es gilt auf $I = (0, \pi)$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &\overset{S.C.7}{=} \int \frac{dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \\ &= \int \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} \frac{1}{2\cos^2(x/2)}\, dx \\ &= \int \frac{1}{\tan(x/2)} \frac{1}{2\cos^2(x/2)}\, dx \\ &\overset{t(x)=\tan(x/2)}{=} \int \frac{dt}{t}_{|t=\tan(x/2)} = \ln(\tan(x/2)) \end{aligned}$$

Zum Abschluss befassen wir uns noch kurz mit der Vertauschung von "lim" und Integration für Funktionenfolgen und Funktionenreihen.

Satz 13.21 *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

1. *Sind $f_n \in R[a, b]$ $(n \in \mathbb{N})$ und konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen die Grenzfunktion f, so ist $f \in R[a, b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\, .$$

2. *Sind $g_\nu \in R[a, b]$ und konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)$ gleichmäßig auf $[a, b]$, so gilt*

$$\int_a^b \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x) \right\} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_a^b g_\nu(x)\, dx\, .$$

Beweis. 1. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N_\varepsilon \in N$ mit

$$||f - f_n||_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geq N)\, .$$

Ferner existiert eine Treppenfunktion φ mit

$$||f_N - \varphi||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}\, .$$

Also folgt

$$||f - \varphi||_\infty \leq ||f - f_N||_\infty + ||f_N - \varphi||_\infty < \varepsilon\, .$$

Damit ist $f \in R[a, b]$. Außerdem ergibt sich aus S. 13.10.3

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq (b - a)||f - f_n||_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty)\, .$$

2. Die 2. Behauptung ergibt sich unmittelbar aus 1. durch Anwendung auf die Teilsummenfolge. □

Beispiel 13.22 Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) := \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt \qquad (x \in \mathbb{R})\ .$$

(Die Funktion e^{-t^2} besitzt keine "elementare" Stammfunktion.)
Es gilt für festes $x > 0$

$$e^{-t^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu t^{2\nu}}{\nu!} \qquad \text{gleichmäßig auf } [0, x]\ .$$

Also gilt nach S. 13.21.2

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_0^x \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu t^{2\nu}}{\nu!} \right) dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int\limits_0^x t^{2\nu}\, dt = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}\ . \end{aligned}$$

Eine analoge Argumentation zeigt, dass die Reihendarstellung auch für $x < 0$ (und trivialerweise für $x = 0$) gilt. Damit haben wir eine Potenzreihenentwicklung für die Funktion F mit Entwicklungsmitte $x_0 = 0$ gefunden.

14 Uneigentliche Integrale

Wir haben bisher nur Integrale auf kompakten Intervallen betrachtet. Wir wollen jetzt auch Integrale auf nichtkompakten Intervallen erklären. Dies werden wird dadurch tun, dass beliebige Intervalle durch kompakte “ausschöpfen”.

Definition 14.1 Es sei $I = [a, b)$ wobei $-\infty < a < b \leq \infty$. Ferner sei $f : [a, b) \to \mathbb{K}$ so, dass $f \in R[a, B]$ für alle $a < B < b$ gilt. Existiert $\lim\limits_{B \to b^-} \int_a^B f(x)\,dx \in \mathbb{K}$, so heißt

$$\int\limits_a^{b^-} f(x)\,dx := \lim_{B \to b^-} \int\limits_a^B f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral von f auf $[a, b)$. Ensprechend definiert man für $-\infty \leq a < b < \infty$ und $f : (a, b] \to \mathbb{K}$ das *uneigentliche Integral*

$$\int\limits_{a^+}^{b} f(x)\,dx := \lim_{A \to a^+} \int\limits_A^b f(x)\,dx$$

(im Falle der Existenz des Grenzwertes).
Ist $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \to \mathbb{K}$, so, dass $\int_{a+}^c f$ sowie $\int_c^{b-} f$ für ein $c \in (a, b)$ existieren, so setzen wir

$$\int\limits_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx := \int\limits_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b^-} f(x)\,dx\,.$$

Im Falle der Existenz der entsprechenden Grenzwerte sprechen wir auch von der *Konvergenz* der Integrale.

Bemerkung 14.2 1. Man beachte, dass die letzte Definition unabhängig von der speziellen Wahl von $c \in (a, b)$ ist, d. h. ist $\tilde{c} \in (a, b)$, so existieren $\int_a^c f$ und $\int_c^b f$ genau dann, wenn $\int_a^{\tilde{c}}$ und $\int_{\tilde{c}}^b$ existieren, und es ist dann $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^{\tilde{c}} f + \int_{\tilde{c}}^b f$.

2. Ist $-\infty < a < b < \infty$ und ist $f \in R[a, b]$, so gilt

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_{a^+}^b f = \int\limits_a^{b^-} f = \int\limits_{a^+}^{b^-} f\,,$$

d. h. die obige Definition stimmt im Falle der Existenz des (eigentlichen) Integrals mit diesem überein.

(Denn: Wir zeigen $\int_a^b f = \int_a^{b^-} f$. Die weiteren Identitäten ergeben sich entsprechend. Nach S. 13.12 (HDI, Teil 1) ist

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a,b])$$

stetig auf $[a,b]$. Also ist

$$\int_a^b f = F(b) = \lim_{B\to b^-} F(B) = \lim_{B\to b^-} \int_a^B f = \int_a^{b^-} f\,.)$$

Deshalb können wir auch kurz $\int_a^b f(x)\,dx$ im Falle uneigentlicher Integrale schreiben.
3. Ist $f : (a,b) \to \mathbb{K}$ stetig und ist $F' = f$ auf (a,b), so existiert $\int_{a^+}^{b^-} f$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ und $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ beide existieren, und in diesem Falle ist

$$\int_{a^+}^{b^-} f = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) =: F(x)|_a^b\,.$$

(Denn: Für $a < A < B < b$ ist nach S. 13.14 (HDI, Teil 2) $F(B) - F(A) = \int_A^B f$. Damit ergibt sich die Behauptung aus der Definition der uneigentlichen Integrale und 2.)

Beispiel 14.3 1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha(x) := 1/x^\alpha$ auf $(a,b) = (0,\infty)$. Ist $F_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & , \quad \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

so gilt $F_\alpha' = f_\alpha$. Außerdem erhalten wir für $x \to \infty$

$$F_\alpha(x) \to \begin{cases} 0 & , \quad \alpha > 1 \\ \infty & , \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

und für $x \to 0^+$

$$F_\alpha(x) \to \begin{cases} 0 & , \quad \alpha < 1 \\ \infty & , \quad \alpha \geq 1 \end{cases}\,.$$

Also existiert nach B. 14.2.3 das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist und in diesem Falle ist

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = F_\alpha(x)|_1^\infty = 0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\,.$$

Entsprechend existiert $\int\limits_{0+}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha < 1$ ist, und dann gilt

$$\int\limits_{0+}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = F_\alpha(x)|_0^1 = \frac{1}{1-\alpha} \ .$$

Hieraus folgt auch, dass für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int\limits_{0+}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ existiert (denn anderenfalls müssten beide uneigentlichen Integrale $\int\limits_{0+}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ und $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ existieren).

2. Wir betrachten $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf $(a,b) = (-1,1)$. Es gilt $\arcsin' = f$ auf $(-1,1)$ und arcsin ist stetig auf $[-1,1]$. Nach B. 14.2.3 existiert $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und es ist

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)|_{-1}^{1} = \pi \ .$$

Wir beschäftigen uns nun mit Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale. Dabei formulieren wir die Ergebnisse für Integrale der Form $\int_a^{b-}$. Entsprechende Aussagen gelten natürlich für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.

Satz 14.4 *(Vergleichskriterium)*
Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ seien so, dass $f, g \in R[a,B]$ für alle $a < B < b$. Ferner gelte

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad (x \in [a,b)) \ .$$

Dann gilt: Existiert $\int_a^{b-} g$, so existiert auch $\int_a^{b-} f$ und es ist

$$\int\limits_a^{b-} f \leq \int\limits_a^{b-} g \ .$$

Beweis. Wir betrachten

$$F(x) := \int\limits_a^x f \ , \qquad G(x) := \int\limits_a^x g \qquad (x \in [a,b)) \ .$$

Dann sind F und G monoton wachsend auf $[a, b)$ und es gilt für $a < B < b$

$$F(B) \leq G(B) \leq \lim_{B \to b^-} \int_a^B g = \int_a^{b^-} g \, .$$

Also existiert auch $\lim\limits_{B \to b^-} F(B) = \int_a^{b^-} f$. (vgl. S. 8.18). □

Satz 14.5 *Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ sei so, dass $f \in R[a, B]$ für alle $a < B < b$. Dann gilt: Existiert $\int_a^{b^-} |f|$, so existiert auch $\int_a^{b^-} f$.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\varphi : [a, b) \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = f(x) + |f(x)| \, .$$

Dann ist $\varphi \in R[a, B]$ für alle $a < B < b$ (S. 13.10.3) und

$$0 \leq \varphi(x) \leq 2|f(x)| \qquad (x \in [a, b)) \, .$$

Mit S. 14.4 folgt die Existenz von $\int_a^{b^-} \varphi$ und aus

$$\int_a^B f = \int_a^B \varphi - \int_a^B |f| \qquad (a < B < b)$$

folgt die Existenz von $\int_a^{b^-} f = \lim\limits_{B \to b^-} \int_a^B f$. □

Beispiel 14.6 1. Wir betrachten für $\alpha > 1$ das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$.

Es gilt

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \qquad (x \geq 1) \, .$$

Da $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ existiert, folgt die Existenz von $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \, dx$ aus S. 14.4. Nach S. 14.5 existiert auch $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$. Entsprechendes gilt für das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} \, dx$.

2. Wir betrachten das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_1^B \frac{\sin x}{x}\,dx &= -\frac{1}{x}\cos x|_1^B - \int\limits_1^B \frac{\cos x}{x^2}\,dx \\ &= \cos 1 - \frac{\cos B}{B} - \int\limits_1^B \frac{\cos x}{x^2}\,dx\end{aligned}$$

Da nach 1. das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergiert, existiert

$$\lim_{B\to\infty} \int\limits_1^B \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx\ ,$$

d. h. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ existiert.

Man kann zeigen ([Ü]): Das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ existiert nicht! Also:

Für uneigentliche Integrale folgt aus der Existenz von $\int_a^{b-} f$ i. A. noch nicht die Existenz von $\int_a^{b-} |f|$.

Im folgenden Satz wird ein Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Reihen und der Konvergenz uneigentlicher Integrale hergestellt:

Satz 14.7 *(Integralkriterium für Reihen)*
Es sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *monoton fallend und es gelte* $f(x) \geq 0$ $(x \geq 1)$. *Dann existiert* $g := \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} f(\nu) - \int_1^{n+1} f \right)$ *und es gilt*

$$0 \leq g \leq f(1)\ .$$

Beweis. Zunächst folgt aus $f(\nu) \geq f(x) \geq f(\nu+1)$ in $[\nu, \nu+1]$

$$f(\nu) \geq \int\limits_\nu^{\nu+1} f(x)\,dx \geq f(\nu+1)\ .$$

Hieraus ergibt sich mit $a_\nu := f(\nu)$

$$0 \le a_\nu - \int\limits_\nu^{\nu+1} f \le a_\nu - a_{\nu+1}$$

und damit ist die Folge (s_n) mit

$$s_n := \sum_{\nu=1}^n a_\nu - \int\limits_1^{n+1} f = \sum_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \int\limits_\nu^{\nu+1} f \right)$$

monoton wachsend mit $0 \le s_n \le f(1) - f(n+1) \le f(1)$. Also ergibt sich die Behauptung mit dem Hauptsatz über monotone Folgen. □

Beispiel 14.8 Wir betrachten $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha > 0$. Dann ist f monoton fallend auf $[1, \infty)$ und $f(x) \ge 0$. Also existiert

$$g = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu^\alpha} - \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \right) .$$

Ist $\alpha > 1$, so ist $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ und $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu^\alpha}$. Nach S. 14.7 ist

$$0 \le \zeta(\alpha) - \frac{1}{\alpha - 1} \le 1 \qquad (\alpha > 1) .$$

Ist $\alpha = 1$, so ergibt sich die Konvergenz von

$$a_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \ln(n+1) .$$

Beispiel 14.9 Das uneigentliche Integral $\int_{0+}^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ existiert für jedes $x > 0$. (Denn: Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0 .$$

Also existiert eine Konstante $M > 0$ so, dass für alle $t \in [1, \infty)$ gilt

$$e^{-t} t^{x-1} \le \frac{M}{t^2}$$

(warum?). Aus der Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ ergibt sich mit dem Vergleichskriterium auch die Konvergenz von $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$.
Weiter gilt

$$e^{-t} t^{x-1} \le t^{x-1} \qquad (t \in (0, 1]) .$$

Aus der Konvergenz von $\int_{0+}^{1} t^{x-1}dt$ (siehe B. 14.3.1) folgt wieder mit dem Vergleichskriterium die Konvergenz von $\int_{0+}^{1} e^{-t}t^{x-1}dt$. Insgesamt ergibt sich damit die Konvergenz von $\int_{0+}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.)
Die Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma(x) := \int_{0+}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x > 0)$$

heißt (*Euler'sche*) *Gammafunktion*. Durch partielle Integration erhält man leicht die folgende "Funktionalgleichung" für Γ ([Ü]):

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad (x > 0)\ . \tag{14.1}$$

Speziell gilt

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}dt = \lim_{B\to\infty} -e^{-t}|_0^B = 1\ ,$$

woraus sich wiederum mit (14.1) induktiv

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ergibt. Die Gammafunktion "interpoliert" also die Fakultäten; man kann $\Gamma(x)$ als "verallgemeinerte Fakultät" auffassen.

Zum Abschluss wollen wir noch eine Formel herleiten, die das Wachstum von $n!$ für $n \to \infty$ sehr genau beschreibt, die sog. Stirling'sche Formel. Dazu beweisen wir zunächst

Satz 14.10 *(Euler'sche Summenformel)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und es sei $f : [1, n] \to \mathbb{K}$ stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \int_1^n f + \frac{1}{2}\Big(f(1) + f(n)\Big) + \int_1^n b(x)f'(x)\ dx$$

mit

$$b(x) := x - [x] - 1/2\ .$$

Beweis. Es gilt mit partieller Integration

$$\int_1^n b(x) f'(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_\nu^{\nu+1} (x-\nu-1/2) f'(x)\, dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[(x-\nu-1/2) f(x) \Big|_\nu^{\nu+1} - \int_\nu^{\nu+1} f(x)\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \Big(f(\nu+1) + f(\nu) \Big) - \int_1^n f(x)\, dx$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) - \frac{1}{2}\Big(f(1) + f(n) \Big) - \int_1^n f(x)\, dx\ .$$

□

Für zwei Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{K}$ mit $x_n, y_n \neq 0$ schreiben wir

$$x_n \sim y_n \qquad (n \to \infty)$$

falls $x_n / y_n \to 1$ $(n \to \infty)$ gilt.

Satz 14.11 *(Stirling'sche Formel)*
Es ist

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \qquad (n \to \infty)\ . \tag{14.2}$$

Beweis. 1. Für $f(x) = \ln(x)$ gilt

$$\int_1^n \log(x)\, dx = x\Big(\log(x) - 1\Big)\Big|_1^n = n \log n - n + 1$$

und damit mit S. 14.10

$$\sum_{\nu=1}^{n} \log \nu = n \log n - n + 1 + \frac{1}{2} \log n + \int_1^n \frac{b(x)}{x}\, dx\ .$$

2. Wir zeigen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{b(x)}{x}\, dx$ konvergiert.

Denn: Es sei

$$B(y) := \int_1^y b(x)\, dx \qquad (y \geq 1).$$

Dann ist B eine Stammfunktion zu b auf $[1,R]$ für jedes $R>1$ (nach HDI, Teil 1). Weiter gilt

$$|B(y)| = \left|\int_1^y b(x)\,dx\right| \le \left|\sum_{\nu=1}^{[y]-1} \underbrace{\int_\nu^{\nu+1} b(x)dx}_{=0}\right| + \int_{[y]}^y \underbrace{|b(x)|}_{\le 1/2}\,dx \le 1/2\,.$$

Also ist insbesondere $\lim\limits_{y\to\infty} B(y)/y = 0$ und nach S. 14.4 und S. 14.5 existiert $\displaystyle\int_1^\infty \frac{B(x)}{x^2}\,dx$.

Durch uneigentliche partielle Integration (siehe [Ü]) erhalten wir

$$\int_1^\infty \frac{b(x)}{x}\,dx = \frac{B(x)}{x}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{B(x)}{x^2}\,dx \ \left(= \int_1^\infty \frac{B(x)}{x^2}\,dx\right).$$

3. Nun betrachten wir

$$a_n := \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

und zeigen: $a_n \to \sqrt{2\pi}$ $(n\to\infty)$. Dies ist äquivalent zur Behauptung. Es gilt nach 1.

$$\log a_n = \sum_{\nu=1}^n \log\nu - n\log n + n - \frac{1}{2}\log n = 1 + \int_1^n \frac{b(x)}{x}\,dx\,,$$

also ist $(\log a_n)$ konvergent nach 2. und damit konvergiert auch (a_n). Wir setzen $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann ist $a>0$ und es gilt unter Verwendung Wallis-Produktes für $\pi/2$ (siehe [Ü])

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi/2} &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}\right]^{1/2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{2^{2n}(a_n n^n e^{-n}\sqrt{n})^2}{a_{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{a_n^2}{a_{2n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

d. h. $a=\sqrt{2\pi}$.

□

Unter Ausnutzung des Wallis-Produktes erhält man auch

Satz 14.12 *Es ist*

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Beweis. Nach S. C.13.2 ist $e^t \le \frac{1}{1-t}$ $(t<1)$, also

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

und damit auch

$$e^{-nx^2} \le \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \qquad (x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N})\ .$$

Entsprechend folgt aus $1+t\le e^t$

$$(1-x^2)^n \le e^{-nx^2} \qquad (0\le x\le 1)\ .$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt &\overset{x=\cos t}{=} \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \le \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx\\ &\le \int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du \le \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}\\ &\overset{x=\operatorname{cotan} t}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\,dt\end{aligned}$$

d. h.

$$\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt \le \int_0^\infty e^{-u^2}\,du \le \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\,dt\ .$$

Mit

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

und

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}$$

(siehe [Ü]) ergibt sich durch Quadrieren

$$\begin{aligned}\frac{n}{2n+1}\left[\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}\right] &\le \left(\int_0^\infty e^{-u^2}\,du\right)^2\\ &\le \frac{n}{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{\left[\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2n-2)(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)}\right]}\end{aligned}$$

Nun gilt (Wallis-Produkt; [Ü])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

also erhalten wir für $n \to \infty$

$$\left(\int_0^\infty e^{-u^2}\, du\right)^2 = \frac{\pi}{4}\,.$$

□

15 Differenzialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

In Abschnitt 10 haben wir Ableitungen von Funktionen einer Variablen untersucht. Wir studieren jetzt für $d, m \in \mathbb{N}$ Funktionen $f : M \to \mathbb{K}^m$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$ ist. Die Räume $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{K}^m$ seien im Folgenden stets mit der euklidschen Metrik versehen. Damit stehen uns die Begriffe und Ergebnisse aus den Abschnitten 7,8 und 9 auch hier zur Verfügung.

Wir bemerken zunächst, dass jede Funktion $f : M \to \mathbb{K}^m$ in m "Koordinatenfunktionen" $f_1, \dots, f_m : M \to \mathbb{K}$ zerlegt werden kann indem man $f_j(x)$ als die j-te Komponente des Vektors $f(x) \in \mathbb{K}^m$ definiert, d. h.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m .$$

Bei vielen Untersuchungen kann man sich damit auf den Fall $m = 1$, d. h. auf den Fall reell- oder komplexwertiger Funktionen, beschränken. So ergibt sich etwa sofort aus B. 7.13, dass f genau dann stetig an einer Stelle $x \in M$ ist, wenn dies für alle Koordinatenfunktionen f_j gilt.

Betrachten wir also $f : M \to \mathbb{K}$. Bevor wir zum eigentlichen Begriff der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher kommen, untersuchen wir zunächst Ableitungen "in einer Richtung". Es handelt sich dabei tatsächlich um "eindimensionale" Ableitungen wie wir sie aus Abschnitt 10 schon kennen.

Definition 15.1 Ein Vektor $r \in \mathbb{R}^d$ mit $|r| = 1$ heißt *Richtung*.

Insbesondere sind

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$$

Richtungen. Unser Ziel ist nun die Untersuchung von Funktionen in einer gegebenen Richtung r, d. h. ist $f : M \to \mathbb{K}$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$, und ist $x^{(0)} \in M$, so betrachten wir die Funktion $\varphi = \varphi_{r,x^{(0)}} : \tilde{M} \to \mathbb{R}^d$ mit

$$\varphi(t) := x^{(0)} + t \cdot r \qquad (t \in \tilde{M})$$

wobei

$$\tilde{M} := \{t \in \mathbb{R} : x^{(0)} + t \cdot r \in M\} ,$$

und damit $g = g_{r,x^{(0)}} : \tilde{M} \to \mathbb{K}$

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = f(x^{(0)} + t \cdot r) \qquad (t \in \tilde{M}) .$$

Beispiel 15.2 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

sowie $x^{(0)} = (0, 0)$. Ist $r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, so ist

$$g(t) = f\Big((0,0) + t(\cos\varphi, \sin\varphi)\Big) = t^2\cos^2\varphi + t\sin\varphi \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Ist speziell $\varphi = 0$, d. h. $r = e_1 = (1, 0)$, so ist

$$g(t) = f\Big((0,0) + t \cdot (1,0)\Big) = t^2 \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

und ist speziell $\varphi = \pi/2$, d. h. $r = e_2 = (0, 1)$, so ist

$$g(t) = t \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Definition 15.3 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und es sei $f : M \to \mathbb{K}$. Ferner sei $x^{(0)} \in M$. Ist r eine Richtung in $\mathbb{R}^d$, so heißt f *differenzierbar in Richtung r an der Stelle $x^{(0)}$*, falls der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x^{(0)} + t \cdot r) - f(x^{(0)})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

(wobei $g(t) = f(x^{(0)} + t \cdot r)$ wie oben) existiert. Wir nennen den Grenzwert *(Richtungs-) Ableitung* von f *in Richtung r* an $x^{(0)}$ und schreiben dafür

$$\partial_r f(x^{(0)}) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial f}{\partial r}(x^{(0)}) \qquad \text{oder} \qquad f_r(x^{(0)}) .$$

Ist speziell $r = e_k$ der k-te Einheitsvektor, so sagen wir, f sei *partiell differenzierbar nach der Variablen x_k* an der Stelle $x^{(0)}$ und schreiben für $\partial_{e_k} f(x^{(0)})$ auch

$$\partial_k f(x^{(0)}) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^{(0)}) \qquad \text{oder} \qquad f_{x_k}(x^{(0)}) .$$

Dieser Wert heißt dann auch *partielle Ableitung von f nach der Variablen x_k* (an der Stelle $x^{(0)}$).

Bemerkung 15.4 Aus D. 15.3 ergibt sich sofort, dass die Ableitung in Richtung r an der Stelle $x^{(0)}$ genau dann existiert, wenn die Funktion $g = g_{r,x^{(0)}}$ an der Stelle 0 differenzierbar ist (und dann gilt $\partial_r f(x^{(0)}) = g'(0)$). Also handelt es sich bei Richtungs- und partiellen Ableitungen um Ableitungen von Funktionen einer reellen Variablen.

Folglich gelten auch alle Resultate, die wir hierfür in Abschnitt 10 hergeleitet haben.

Besonders einfach ist die Situation für partielle Ableitungen: Ist $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_d^{(0)}) \in \mathbb{R}^d$, so ist für $k = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned} \partial_k f(x^{(0)}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x^{(0)} + t \cdot e_k) - f(x^{(0)})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + t, x_{k+1}^{(0)}, \ldots, x_d^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t} . \end{aligned}$$

Man sieht, dass $\partial_k f(x^{(0)})$ sich darstellt als die Ableitung der Funktion

$$x_k \mapsto f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_d)$$

bei festgehaltenen Variablen $x_1, \ldots, x_{k-1}$ und $x_{k+1}, \ldots, x_d$ (diese werden sozusagen als Parameter aufgefasst).

Im Falle $d = 2$ schreibt man meist "$f(x, y)$" statt "$f(x_1, x_2)$". In diesem Falle sprechen wir auch von den partiellen Ableitungen nach x bzw. y und schreiben für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ auch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{bzw.} \qquad f_x(x_0, y_0)$$

sowie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \text{bzw.} \qquad f_y(x_0, y_0) .$$

Entsprechend schreiben wir im Falle $d = 3$ oft "$f(x, y, z)$" statt "$f(x_1, x_2, x_3)$" und

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{bzw.} \qquad f_x, f_y, f_z .$$

Beispiel 15.5 1. Es sei f wie in B. 15.2, d. h. $f(x, y) = x^2 + y$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Dann gilt für $r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ und $x^{(0)} = (0, 0)$

$$\partial_r f(0, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}(0, 0) = f_r(0, 0) \right) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos^2\varphi + t \sin\varphi}{t} = \sin\varphi .$$

Weiter gilt für allgemeines $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_1 f(x_0, y_0) \left(= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \right) = 2x_0$$

und

$$\partial_2 f(x_0, y_0) \left(= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \right) = 1$$

2. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}) .$$

Dann gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y,z) \quad & \Big(= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \quad = \quad f_x(x,y,z)\Big) \quad = \quad y^2z^3 \\
\partial_2 f(x,y,z) \quad & \Big(= \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \quad = \quad f_y(x,y,z)\Big) \quad = \quad 2xyz^3 \\
\partial_3 f(x,y,z) \quad & \Big(= \tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \quad = \quad f_2(x,y,z)\Big) \quad = \quad 3xy^2z^2 \ .
\end{aligned}$$

3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dann gilt für $(x_0,y_0) \neq (0,0)$:

$$\partial_1 f(x_0,y_0) = \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} - \frac{2x_0^2y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

und

$$\partial_2 f(x_0,y_0) = \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} - \frac{2x_0y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \ .$$

Für $(x_0,y_0) = (0,0)$ gilt

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

und

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Also existieren die partiellen Ableitungen in allen Punkten (x_0,y_0). Die Funktion f ist allerdings nicht stetig an der Stelle $(0,0)$, denn für $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ gilt

$$f(x_n,y_n) = \frac{1/n^2}{1/n^2+1/n^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \qquad (n\to\infty) \ .$$

Das Beispiel zeigt, dass die Existenz der partiellen Ableitungen i. A. (anders als im Fall $d=1$) noch nicht die Stetigkeit impliziert. Man beachte allerdings, dass die partiellen Ableitungen in der Nähe von $(0,0)$ unbeschränkt und damit insbesondere unstetig sind (es gilt für $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$

$$\partial_1 f(0,y_0) = 1/y_0 \ , \qquad \partial_2 f(x_0,0) = 1/x_0 \ ).$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Begriff der Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer reeller Variablen. Wir werden sehen, dass – wie im eindimensionalen – die Differenzierbarkeit die Stetigkeit impliziert, und wir werden sehen, dass ein sehr enger Zusammenhang zu den partiellen Ableitungen besteht.
Die folgende Definition erweist sich als eine unmittelbare Übertragung der Zerlegungsformel (S. 10.6) in's Mehrdimensionale

Definition 15.6 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und es sei $f : M \to \mathbb{K}^m$ (wobei $d, m \in \mathbb{N}$ beliebig). Ferner sei $x^{(0)} \in M \cap H(M)$. Dann heißt f *differenzierbar* an der Stelle $x^{(0)}$, falls eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{m \times d}$ und eine in $x^{(0)}$ stetige Funktion $\varepsilon : M \to \mathbb{K}^m$ so existieren, dass gilt

$$f(x) = f(x^{(0)}) + C \cdot (x - x^{(0)}) + |x - x^{(0)}| \varepsilon(x) \quad (x \in M)$$

und $\varepsilon(x^{(0)}) = 0$. In diesem Fall heißt jede solche Matrix C *Ableitung* von f an $x^{(0)}$.

Bemerkung 15.7 1. Die Differenzierbarkeit von f an der Stelle $x^{(0)}$ bedeutet anschaulich, dass f "in der Nähe" von $x^{(0)}$ gut angenähert werden kann durch die affin-lineare Funktion

$$T(x) := f(x^{(0)}) + C \cdot (x - x^{(0)})$$

(nämlich so gut, dass der Fehler, den man dabei begeht, schneller als $|x - x^{(0)}|$ gegen 0 konvergiert für $x \to x^{(0)}$). Im Fall $d = 2$ und $\mathbb{K}^m = \mathbb{R}$, also im Falle einer reellwertigen Funktion von zwei (reellen) Variablen ist der Graph von T eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Diese Ebene stellt die "Tangentialebene" an den Graphen von f im Punkt $x^{(0)}$ dar.

2. Ist $f : M \to \mathbb{K}^m$ mit den Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m : M \to \mathbb{K}$, so gilt: f ist genau dann differenzierbar an $x^{(0)}$, wenn sämtliche Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ differenzierbar an $x^{(0)}$ sind.
Denn: Ist f differenzierbar an $x^{(0)}$ und sind $C = (c_{j_k})$ sowie $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)^T$ wie in D. 15.6, so gilt für $j = 1, \ldots, m$ und $x \in M$ mit $c_j := (c_{j1}, \ldots, c_{jd})$

$$f_j(x) - f_j(x^{(0)}) - c_j(x - x^{(0)}) = \varepsilon_j(x)|x - x^{(0)}| \qquad (x \in M)$$

und aus $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to x^{(0)})$ folgt auch $\varepsilon_j(x) \to 0$ $(x \to x^{(0)})$. Also ist f_j differenzierbar an $x^{(0)}$.
Sind umgekehrt f_j $(j = 1, \ldots, m)$ differenzierbar an $x^{(0)}$, so existieren Vektoren $c_j = (c_{j1}, \ldots, c_{jd}) \in \mathbb{R}^d$ und Funktionen $\varepsilon_j : M \to \mathbb{K}$ mit $\varepsilon_j(x) \to 0 = \varepsilon_j(0)$ $(x \to x^{(0)})$ und

$$f_j(x) = f_j(x^{(0)}) + c_j(x - x^{(0)}) + \varepsilon_j(x)|x - x^{(0)}| \; .$$

Für

$$C := (c_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,d}} \in \mathbb{R}^{m \times d}$$

und $\varepsilon := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)^T : M \to \mathbb{K}^m$ gilt dann

$$f(x) - f(x^{(0)}) - C(x - x^{(0)}) = |x - x^{(0)}| \varepsilon(x)$$

und aus B. 7.13 ergibt sich $\varepsilon(x) \to 0 = \varepsilon(x)$ für $x \to x^{(0)}$. Also ist f differenzierbar an $x^{(0)}$.
3. Ist $M \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, so haben wir Differenzierbarkeit für eine Funktion $f : M \to \mathbb{K}$ bereits in Abschnitt 10 definiert. Wir werden später sehen, dass sich die beiden Definitionen (wesentlich!) voneinander unterscheiden. Im Fall der Differenzierbarkeit im Sinne von D. 15.6 sprechen wir daher auch von *reller Differenzierbarkeit.*

Definition 15.8 Ist $M \subset \mathbb{R}^d$ und ist $f : M \to \mathbb{K}^m$ so, dass für ein $x^{(0)} \in M$ die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ nach allen Variablen existieren, so heißt die Matrix

$$Jf(x^{(0)}) := \Big(\partial_k f_j(x^{(0)})\Big)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,d}} \in \mathbb{K}^{m\times d}$$

Jacobi-Matrix von f an $x^{(0)}$. Ist $m = 1$, d. h. $f : M \to \mathbb{K}$, so schreibt man auch

$$\operatorname{grad} f(x^{(0)}) := \nabla f(x^{(0)}) := (Jf)^T(x^{(0)}) = \Big(\partial_1 f(x^{(0)}), \ldots, \partial_d f(x^{(0)})\Big)^T .$$

Dieser (Spalten-) Vektor heißt *Gradient* von f an $x^{(0)}$.

Beispiel 15.9 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy^2} \\ y \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy^2} & 2xye^{xy^2} \\ y\cos x & \sin x \end{pmatrix}$$

und

$$\operatorname{grad} f_1(x,y) = (y^2 e^{xy^2}, 2xye^{xy^2})^T$$

sowie

$$\operatorname{grad} f_2(x,y) = (y\cos x, \sin x)^T.$$

Wir stellen nun eine erste Beziehung zwischen Ableitung und partiellen Ableitungen her.

Satz 15.10 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f = (f_1, \ldots, f_m)^T : M \to \mathbb{K}^m$ differenzierbar an der Stelle $x^{(0)} \in M^0$. Dann gilt: Die Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ sind partiell differenzierbar nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_d$ und für die Ableitung C aus D. 15.6 gilt*

$$C = (c_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,d}} = \Big(\partial_k f_j(x^{(0)})\Big)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,d}} = Jf(x^{(0)}) .$$

Wir schreiben dann auch $f'(x^{(0)}) := Df(x^{(0)}) := C$. (Man beachte dabei: Insbesondere ist C eindeutig bestimmt.)

Beweis. Es seien $C = (c_{jk})$ und ε wie in D. 15.6. Ist $c_j = (c_{j1}, \ldots, c_{jd})$ die j-te Zeile von C und ist $k \in \{1, \ldots, d\}$ fest, so gilt für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ genügend klein

$$\begin{aligned}\frac{f_j(x^{(0)} + te_k) - f_j(x^{(0)})}{t} &= \frac{c_j \cdot te_k + \varepsilon_j(x^{(0)} + te_k)|te_k|}{t} \\ &= c_j \cdot e_k + \varepsilon_j(x^{(0)} + te_k)\,\mathrm{sign}(t) \\ &= c_{jk} + \varepsilon_j(x^{(0)} + te_k)\,\mathrm{sign}(t)\ .\end{aligned}$$

Aus $\varepsilon_j(x^{(0)} + te_k) \to 0$ $(t \to 0)$ folgt die Behauptung. □

Wir benötigen im folgenden einige Hilfsmittel aus der Linearen Algebra.

Satz 15.11 *Es seien $d, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Für $A \in \mathbb{K}^{m \times d}$ setzen wir*

$$||A|| := \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{K}^d\ ,\ |x| \leq 1\}\ .$$

Dann ist $||A|| \leq \sum_{k=1}^{d} |Ae_k|$ und es gilt $|Ax| \leq ||A|| \cdot |x|$ für alle $x \in \mathbb{K}^d$.

2. *Durch $||\cdot||$ ist eine Norm auf $\mathbb{K}^{m \times d}$ gegeben (die sog.* Operatornorm*).*

3. *Sind $A \in \mathbb{K}^{m \times d}$ und $B \in \mathbb{K}^{p \times m}$, wobei $p \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$||BA|| \leq ||B|| \cdot ||A||\ .$$

Beweis. 1. Es sei $x \in \mathbb{K}^d$ mit $|x| \leq 1$. Dann gilt $x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k$ und es ist $|x_k| \leq 1$ für $k = 1, \ldots, d$. Also folgt

$$|Ax| = \left|\sum_{k=1}^{d} x_k A e_k\right| \leq \sum_{k=1}^{d} |x_k| \cdot |Ae_k| \leq \sum_{k=1}^{d} |Ae_k| =: M\ .$$

Da dies für alle x mit $|x| \leq 1$ gilt ist $||A|| \leq M$.
Ist $x \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}$ beliebig, so gilt

$$|Ax| = |x| \cdot \left|A\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leq ||A|| \cdot |x|$$

(und für $x = 0$ ist $A0 = 0$).

2. [Ü]

3. Es sei $x \in \mathbb{K}^d$ mit $|x| \leq 1$. Dann gilt mit 1.

$$|(BA)x| = |B(Ax)| \leq ||B|| \cdot |Ax| \leq ||B|| \cdot ||A||$$

also ist $||BA|| \leq ||B|| \cdot ||A||$ nach Definition. □

Damit erhalten wir wie im Falle einer Variablen

Satz 15.12 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und es sei $f : M \to \mathbb{K}^m$. Ist f differenzierbar an der Stelle $x^{(0)} \in M$, so ist f stetig an der Stelle $x^{(0)}$.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus D. 15.6 gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x^{(0)})| &\leq |C(x - x^{(0)})| + |x - x^{(0)}| \cdot |\varepsilon(x)| \\ &\leq ||C|| \cdot |x - x^{(0)}| + |x - x^{(0)}| \cdot |\varepsilon(x)| \to 0 \quad (x \to x^{(0)}) \ . \end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$$

und damit ist f stetig an $x^{(0)}$. □

In B. 15.5 hatten wir gesehen, dass die Existenz aller partiellen Ableitungen i. A. noch nicht die Stetigkeit, also nach S. 15.12 schon gar nicht die Differenzierbarkeit impliziert. Es gilt jedoch

Satz 15.13 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$, und es sei $f = (f_1, \ldots, f_m)^T : M \to \mathbb{K}^m$. Sind $x^{(0)} \in M^0$ und $R > 0$ so, dass die partiellen Ableitungen $\partial_k f_j$ für alle j, k auf $U_R(x^{(0)})$ existieren und stetig an $x^{(0)}$ sind, so ist f differenzierbar an $x^{(0)}$. Außerdem ist in diesem Fall die Abbildung*

$$U_R(x^{(0)}) \ni x \mapsto Jf(x) \in \mathbb{K}^{m \times d}$$

stetig an $x^{(0)}$ (wobei $\mathbb{K}^{m \times d}$ mit der von der Operatornorm herkommenden Metrik versehen ist).

Beweis. 1. Wir zeigen: f ist differenzerbar an $x^{(0)}$. Nach B. 15.7.2 können wir uns auf den Beweis für den Fall $m = 1$ beschränken. Außerdem können wir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen (ansonsten: Real- und Imaginärteil von f betrachten).
Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ (o. E. $\delta < R$) mit

$$|\partial_k f(y) - \partial_k f(x^{(0)})| < \frac{\varepsilon}{d} \quad (y \in U_\delta(x^{(0)}),\ k = 1, \ldots, d) \ .$$

Es sei $x \in U_\delta(x^{(0)})$. Wir setzen $h := x - x^{(0)}$. Ist $h = (h_1, \dots, h_d) = \sum_{k=1}^{d} h_k e_k$, so betrachten wir $v_0 = 0$ und $v_m := \sum_{k=1}^{m} h_k e_k$ $(1 \leq m \leq d)$. Dann gilt (Teleskopsumme!)

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^{(0)}) &= f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) \\ &= \sum_{k=1}^{d} \left\{ f(x^{(0)} + v_k) - f(x^{(0)} + v_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

Wegen $|v_k| \leq |h| < \delta$ ist $x^{(0)} + v_k \in U_\delta(x^{(0)})$ für $k = 0, \dots, d$. Weiter ist $v_k = v_{k-1} + h_k e_k$. Also existiert nach dem Mittelwertsatz (angewandt auf $t \mapsto f(x^{(0)} + v_{k-1} + te_k)$) für jedes $k \in \{1, \dots, d\}$ ein $\theta = \theta_k \in (0, 1)$ mit

$$f(x^{(0)} + v_k) - f(x^{(0)} + v_{k-1}) = h_k \partial_k f(x^{(0)} + v_{k-1} + \theta h_k e_k) .$$

Dabei ist $y^{(k)} := x^{(0)} + v_{k-1} + \theta h_k e_k \in U_\delta(x^{(0)})$. Also folgt

$$\begin{aligned} & |f(x^{(0)} + h) - f(x^{(0)}) - \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot h| = \\ \leq & \sum_{k=1}^{d} |f(x^{(0)} + v_k) - f(x^{(0)} + v_{k-1}) - \partial_k f(x^{(0)}) h_k| \\ \leq & \sum_{k=1}^{d} |h_k| |\partial_k f(y^{(k)}) - \partial_k f(x^{(0)})| \leq d\varepsilon |h| . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist

$$\lim_{x \to x^{(0)}} \frac{f(x) - f(x^{(0)}) - \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)})}{|x - x^{(0)}|} = 0$$

was äquivalent zur Differenzierbarkeit von f an $x^{(0)}$ ist.

2. Für $k = 1, \dots, d$ sind nach Voraussetzung (und B. 7.13) die Abbildungen

$$U_R(x^{(0)}) \ni x \mapsto Jf(x) e_k = \begin{pmatrix} \partial_k f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_k f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

(also die Spalten von Jf) stetig an $x^{(0)}$. Damit erhalten wir mit S. 15.11.1

$$||Jf(x) - Jf(x^{(0)})|| \leq \sum_{k=1}^{d} |Jf(x)e_k - Jf(x^{(0)})e_k| \to 0 \qquad (x \to x^{(0)})$$

Dies impliziert die Stetigkeit von $x \mapsto Jf(x)$ an $x^{(0)}$. □

Beispiel 15.14 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy^2} \\ y \cdot \sin x \end{pmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(vgl. B. 15.9). Dann sind die partiellen Ableitungen

$$\partial_1 f_1(x,y) = y^2 e^{xy^2} \quad , \quad \partial_2 f_1(x,y) = 2xye^{xy^2}$$
$$\partial_1 f_2(x,y) = y \cdot \cos x \; , \quad \partial_2 f_2(x,y) = \sin x$$

alle stetig auf $\mathbb{R}^2$. Also ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ nach S. 15.13.

Wir befassen uns zum Abschluss noch mit Rechenregeln für die Ableitung. Wie im Eindimensionalen gilt

Satz 15.15 *1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$, und es seien $f, g : M \to \mathbb{K}^m$ differenzierbar an der Stelle $x^{(0)} \in M$. Dann ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f + \beta g$ differenzierbar an $x^{(0)}$ und es gilt im Falle $x^{(0)} \in M0$*

$$(\alpha f + \beta g)'(x^{(0)}) = \alpha f'(x^{(0)}) + \beta g'(x^{(0)})$$

(andere Schreibweise: $J(\alpha f + \beta g)(x^{(0)}) = \alpha Jf(x^{(0)}) + \beta Jg(x^{(0)})$).

2. (Kettenregel) Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{R}^m$. Ferner seien $L \subset \mathbb{R}^m$ und $g : L \to \mathbb{K}^p$ mit $L \supset W(f)$. Ist f differenzierbar an $x^{(0)} \in M$ und ist g differenzierbar an $y^{(0)} = f(x^{(0)}) \in L^0$, so ist auch $g \circ f : M \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar an $x^{(0)}$ und es gilt im Falle $x^{(0)} \in M^0$, $y^{(0)} \in L^0$

$$(g \circ f)'(x^{(0)}) = g'\big(f(x^{(0)})\big) \cdot f'(x^{(0)})$$

wobei "·" die übliche Matrixmultiplikation bezeichnet
(andere Schreibweise: $J(g \circ f)(x^{(0)}) = Jg(f(x^{(0)})) \cdot Jf(x^{(0)})$).

Beweis. 1. ergibt sich unmittelbar aus D. 15.6 und S. 15.10. Der Beweis zu 2. verläuft (unter Verwendung von S. refS199) in völliger Analogie zum Beweis der Kettenregel im Eindimensionalen (S. 10.7). $\square$

Beispiel 15.16 Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}, \qquad g(u, v) := u^2 v \; .$$

Dann gilt

$$g(f(x,y)) = (e^x \cos y)^2 e^x \sin y = e^{3x} \cos^2 y \sin y \ ,$$

also

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x,y)\big(&= J(g\circ f)(x,y) = \ \mathrm{grad}^T \ (g\circ f)(x,y)\big)\\ &= \ (3e^{3x}\cos^2 y \sin y \ , \ e^{3x}(\cos^3 y - 2\cos y \sin^2 y)) \ .\end{aligned}$$

Andererseits gilt auch

$$f'(x,y) = Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \ ,$$

und

$$g'(u,v) = (\mathrm{grad}^T g(u,v) = Jg(u,v)) = (2uv, u^2) \ ,$$

also

$$\begin{aligned}g'(f(x,y))f'(x,y) = \ &\mathrm{grad}^T \ g(f(x,y))Jf(x,y) = \\ &= (2e^{2x}\sin y\cos y, e^{2x}\cos^2 y)\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = \\ &= (3e^{3x}\sin y \cos^2 y, e^{3x}(\cos^3 y - 2\cos y \sin^2 y)) \ .\end{aligned}$$

Ein besonders wichtiger Spezialfall der Kettenregel ergibt sich für Funktionen $f : M \to \mathbb{K}$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$ offen, und $\varphi : I \to M$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ offen ist. Sind φ bzw. f differenzierbar an $t \in I$ bzw. $\varphi(t)$ so erhalten wir für $f \circ \varphi : I \to \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)'(t) \quad &= \quad f'(\varphi(t))\varphi'(t) = \ \mathrm{grad}^T \ f(\varphi(t)) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_d'(t)\end{pmatrix} \\ &= \quad \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t)) \cdot \varphi_j'(t) \ . \qquad (15.1)\end{aligned}$$

Als wichtige Konsequenz ergibt sich

Satz 15.17 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{K}$ sei differenzierbar an $x^{(0)} \in M^0$. Für alle Richtungen $r \in \mathbb{R}^d$ existiert dann $\partial_r f(x^{(0)})$ und es gilt*

1. $\partial_r f(x^{(0)}) = \mathrm{grad}^T \ f(x^{(0)}) \cdot r$,

2. $|\partial_r f(x^{(0)})| \leq |\mathrm{grad}\, f(x^{(0)})|$.

Beweis. 1. Da $x^{(0)}$ ein innerer Punkt von M ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x^{(0)}) \subset M$. Wir betrachten $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^d$ mit

$$\varphi(t) := x^{(0)} + t \cdot r \qquad (t \in (-\delta, \delta)) .$$

Dann gilt mit (15.1)

$$\partial_r f(x^{(0)}) = (f \circ \varphi)'(0) = \operatorname{grad}^T f(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0) = \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot r$$

(beachte dabei: $\varphi_j'(0) = r_j$ für $j = 1, \ldots, d$).

2. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ergibt sich aus 1. unmittelbar

$$|\partial_r f(x^{(0)})| = |\operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot r| \leq |\operatorname{grad} f(x^{(0)})| \cdot |r| = |\operatorname{grad} f(x^{(0)})| .$$

□

Bemerkung 15.18 Ist $f : M \to \mathbb{R}$ und $x^{(0)}$ so, dass $\operatorname{grad} f(x^{(0)}) \neq 0$, so gilt für $r_0 = \operatorname{grad} f(x^{(0)})/|\operatorname{grad} f(x^{(0)})|$ (die sog. Gradientenrichtung) mit S. 15.17.1

$$\begin{aligned} \partial_{r_0} f(x^{(0)}) &= \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot r_0 = \frac{1}{|\operatorname{grad} f(x^{(0)})|} \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot \operatorname{grad} f(x^{(0)}) \\ &= |\operatorname{grad} f(x^{(0)})| \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\partial_{-r_0} f(x^{(0)}) = -|\operatorname{grad} f(x^{(0)})| .$$

(Die Gradientenrichtung ist die "Richtung des steilsten Anstiegs" von f und die negative Gradientenrichtung ist die "Richtung des steilsten Abstiegs" von f.)
Außerdem gilt für $r_1 \perp \operatorname{grad} f(x^{(0)})$

$$\partial_{r_1} f(x^{(0)}) = \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot r_1 = 0 .$$

d. h. die Richtungsableitung senkrecht zur Gradientenrichtung verschwindet. Diese Erkenntnisse werden sich als grundlegend für die mehrdimensionale Optimierung erweisen.

Beispiel 15.19 Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

Dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, 2y)^T .$$

Ist etwa $(x_0, y_0) = (1, 1)$, so ist für $r = (r_1, r_2)^T$ mit $|r| = 1$

$$\operatorname{grad}^T f(1,1) \cdot r = (2,2) \cdot r = 2r_1 + 2r_2 \ .$$

Für $r_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ ist $\operatorname{grad}^T f(1,1) \cdot r_0 = 2\sqrt{2} = |\operatorname{grad} f(1,1)|$, und für $r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$ ist $\operatorname{grad}^T f(1,1) \cdot r_1 = 0$.

Wir setzen für $x, y \in \mathbb{K}^d$

$$I(x,y) := \{x + t(y-x) : t \in (0,1)\}$$

und

$$I[x,y] := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\} \ .$$

Als weitere Anwendung von (15.1) ergibt sich damit

Satz 15.20 *(Mittelwertsatz)*
Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und es sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig auf M und differenzierbar auf M^0. Sind $x, y \in M$ so, dass $I(x,y) \subset M^0$ gilt, so existiert ein $\xi \in I(x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = \operatorname{grad}^T f(\xi) \cdot (y-x) \ .$$

Beweis. Wir betrachten $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(t) := x + t(y-x) \qquad (t \in [0,1]) \ .$$

Dann ist $g := f \circ \varphi$ stetig auf $[0,1]$ und differenzierbar auf $(0,1)$ mit

$$g'(t) = \operatorname{grad}^T f(x + t(y-x)) \cdot (y-x) \ .$$

Nach dem "eindimensionalen" Mittelwertsatz (S. 10.16) existieren $\tau \in (0,1)$ mit

$$g'(\tau) = g(1) - g(0) = f(y) - f(x) \ .$$

Also gilt mit $\xi := x + \tau(y-x)$ die Behauptung. □

Bemerkung 15.21 I. A. gilt kein Analogon zum Mittelwwertsatz für vektorwertige Funktionen: Ist etwa $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(t) := (t^2, t^3)^T$, so existiert kein ξ mit

$$f(1) - f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi \\ 3\xi^2 \end{pmatrix} = f'(\xi)(1-0)$$

16 Taylorsatz und Extremstellen von Funktionen mehrerer Variablen

Wir beschäftigen uns zunächst mit Ableitungen höherer Ordnung.

Definition 16.1 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{K}$. Ferner sei $x^{(0)} \in M$.
1. Sind r, s Richtungen in $\mathbb{R}^d$, und ist $\partial_r f$ definiert auf M und differenzierbar in Richtung s an $x^{(0)}$, so setzen wir

$$(\partial_s \partial_r f)(x^{(0)}) := \partial_s(\partial_r f)(x^{(0)}) \ .$$

Sind allgemeiner $r_1, \ldots, r_\ell$ Richtungen, so definieren wir induktiv

$$(\partial_{r_\ell} \ldots \partial_{r_1} f)(x^{(0)}) := \partial_{r_\ell}(\partial_{r_{\ell-1}} \ldots \partial_{r_1} f)(x^{(0)})$$

im Falle der Existenz der entsprechenden Grenzwerte (*Richtungsableitungen der Ordnung* ℓ). Für $r_1 = \ldots = r_\ell =: r$ schreiben wir kurz $\partial_r^\ell f(x^{(0)})$.

2. Sind Speziell $r_1 = e_{k_1}, \ldots, r_\ell = e_{k_\ell}$, so schreibt man wieder

$$(\partial_{k_\ell} \ldots \partial_{k_1} f)(x^{(0)}) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{k_\ell} \ldots \partial x_{k_1}}(x^{(0)})$$

an Stelle von $(\partial_{r_\ell} \ldots \partial_{r_1} f)(x^{(0)})$ (*partielle Ableitungen der Ordnung* ℓ). Für $k_1 = \ldots = k_\ell =: k$ schreibt man kurz $\partial_k^\ell f(x^{(0)})$ bzw. $\frac{\partial^\ell f}{\partial x_k^\ell}(x^{(0)})$.

(Bei zwei Variablen schreibt man meist (x, y) statt (x_1, x_2) und bei drei Variablen meist (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3).)

3. Schließlich setzen wir noch $\partial_r^0 f := f$ und $\partial_k^0 f := f$ (d.h. die Richtungs- bzw. partiellen Ableitungen der Ordung 0 sind f selbst).

Beispiel 16.2 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = e^{xy} + x^2 y \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + 2xy \\
\partial_2 f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + x^2 \\
\partial_1^2 f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy} + 2y \\
\partial_2\partial_1 f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} + 2x \\
\partial_1\partial_2 f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} + 2x \\
\partial_2^2 f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy} \ .
\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass $\partial_2\partial_1 f = \partial_1\partial_2 f$ gilt.
Weiter erhalten wir etwa

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_2\partial_1 f(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}(1+xy) + 2x) = \\
&= ye^{xy}(1+xy) + ye^{xy} + 2 \\
\partial_2\partial_1^2 f(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 e^{xy} + 2y) = \\
&= 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy} + 2
\end{aligned}$$

also ist $\partial_1\partial_2\partial_1 f = \partial_2\partial_1^2 f$. Man sieht also, dass die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen gebildet werden, vertauscht werden kann.

Wir beweisen ganz allgemein für partielle Ableitungen der Ordnung 2:

Satz 16.3 *(Schwarz)*
Es seien $M \subset \mathbb{R}^d$ sowie $x^{(0)} \in M^0$, und es seien $p, q \in \{1, \ldots, d\}$. Ferner sei $f : M \to \mathbb{K}$ so, dass $\partial_p f$, $\partial_q f$ und $\partial_q\partial_p f$ auf einer Umgebung U von $x^{(0)}$ existieren. Ist $\partial_q\partial_p f$ stetig an $x^{(0)}$, so existiert auch $\partial_p\partial_q f(x^{(0)})$ und es gilt

$$\partial_p\partial_q f(x^{(0)}) = \partial_q\partial_p f(x^{(0)}) \ .$$

Beweis. O. E. können wir $d = 2$ sowie $p = 1, q = 2$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen. Wir wählen $h_0, k_0 > 0$ so, dass (mit $x^{(0)} = (x_0, y_0)$)

$$(x_0 + h, y_0 + k) \in U$$

für alle $|h| < h_0$ und $|k| < k_0$ gilt. Weiter betrachten wir für ein festes solches k die Funktion $g = g_k : (x_0 - h_0, x_0 + h_0) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := f(t, y_0 + k) - f(t, y_0) \qquad (t \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)) \ .$$

Es sei $|h| < h_0$ fest. Zwei Anwendungen des Mittelwertsatzes (S. 10.16) zeigen, dass ein $\xi \in I(x_0, x_0 + h)$ und ein $\eta \in I(y_0, y_0 + k)$ existieren mit

$$\begin{aligned} \Delta(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0) = \\ = \quad & g(x_0+h) - g(x_0) = hg'(\xi) = \\ = \quad & h[\partial_1 f(\xi, y_0+k) - \partial_1 f(\xi, y_0)] = hk\partial_2\partial_1 f(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Nun setzen wir $A := \partial_2\partial_1 f(x_0, y_0)$ und geben $\varepsilon > 0$ vor. Sind $|h|$ und $|k|$ genügend klein, so ist

$$|A - \partial_2\partial_1 f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

($\partial_2\partial_1 f$ ist stetig an (x_0, y_0)). Also erhalten wir für $h, k \neq 0$

$$\left| \frac{\Delta(h,k)}{h \cdot k} - A \right| < \varepsilon$$

für $|h|, |k|$ genügend klein. Betrachtet man bei festem h den Grenzwert $\lim\limits_{k \to 0} \frac{\Delta(h,k)}{k}$, so erhält man damit auch

$$\left| \frac{\partial_2 f(x_0+h, y_0) - \partial_2 f(x_0, y_0)}{h} - A \right| \leq \varepsilon$$

für alle $h \neq 0$ mit $|h|$ genügend klein. Damit existiert $\partial_1\partial_2 f(x_0, y_0)$ und es gilt

$$\partial_1\partial_2 f(x_0, y_0) = A\ .$$

□

Bemerkung und Definition 16.4 1. Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und ist $n \in \mathbb{N}_0$, so bezeichnen wir mit $C^n(U) := C^n(U, \mathbb{K})$ die Menge aller Funktionen $f : U \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass die partiellen Ableitungen der Ordnung $(\leq)\,n$ auf U existieren und dort stetig sind. Außerdem setzen wir

$$C^\infty(U) := C^\infty(U, \mathbb{K}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C^n(U, \mathbb{K})\ .$$

Durch mehrfache Anwendung von S. 16.3 sieht man: Ist $f \in C^n(U)$ und sind $k_1, \ldots, k_n \in \{1, \ldots, d\}$, so gilt für jede Permutation $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$:

$$\partial_{k_n} \ldots \partial_{k_1} f(x) = \partial_{k_{p(n)}} \ldots \partial_{k_{p(1)}} f(x) \qquad (x \in U)\ ,$$

d. h. die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen $\partial_{k_1}, \ldots, \partial_{k_n}$ gebildet werden, spielt keine Rolle.

2. Die Aussage von 1. wird i. A. falsch, wenn man auf die Voraussetzung der Stetigkeit der partiellen Ableitungen der Ordnung n verzichtet. So kann man etwa für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

zeigen ([Ü]): Alle partiellen Ableitungen der Ordnung 2 existieren auf $\mathbb{R}^2$ und sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, aber es gilt

$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = -1\ , \quad \partial_1\partial_2 f(0,0) = 1\ .$$

In Verallgemeinerung von S. 15.17 ergibt sich

Satz 16.5 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und es sei $f \in C^n(U)$. Dann existiert $\partial_r^n f$ für alle Richtungen $r \in \mathbb{R}^d$ auf U und ist dort stetig. Ferner gilt mit $r = (r_1, \ldots, r_d)$*

$$\partial_r^n f(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{d} (\partial_{k_n} \ldots \partial_{k_1} f)(x) \cdot r_{k_1} \cdots r_{k_n}\ .$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.
$n = 1$: Ist $f \in C^1(U)$, so folgt aus S. 15.13, dass f differenzierbar auf U ist. Aus S. 15.17 erhalten wir

$$\partial_r^1 f(x) = \partial_r f(x) = \operatorname{grad}^T f(x) \cdot r = \sum_{k_1=1}^{d} \partial_{k_1} f(x) \cdot r_{k_1}\ .$$

$n \to n+1$: Da $f \in C^{n+1}(U)$ ist, folgt $\partial_r^n f \in C^1(U)$ mit der Induktionsvoraussetzung (man beachte: $x \mapsto \partial_r^n f(x)$ ist eine Linearkombination von partiellen Ableitungen der Ordnung n). Also ergibt sich wie oben beim Induktionsanfang

$$\begin{aligned} \partial_r^{n+1} f(x) &= \partial_r(\partial_r^n f)(x) = \operatorname{grad}^T (\partial_r^n f)(x) \cdot r \\ &= \sum_{k_{n+1}=1}^{d} \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{d} \partial_{k_{n+1}}(\partial_{k_n} \ldots \partial_{k_1} f)(x) r_{k_1} \cdots r_{k_n} \cdot r_{k_{n+1}}\ , \end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $n+1$ folgt. □

Definition 16.6 Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ heißt *konvex*, falls $I[x,y] \subset M$ für alle $x, y \in M$ gilt.

Damit erhalten wir

Satz 16.7 *(Taylor-Satz)*
Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex, und es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner seien $f \in C^{n+1}(U)$ und $x^{(0)} \in U$. Ist r eine Richtung, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $x^{(0)} + tr \in U$

$$f(x^{(0)} + tr) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\partial_r^\nu f(x^{(0)})}{\nu!} t^\nu + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \partial_r^{n+1} f(x^{(0)} + sr)\, ds \,.$$

Dabei bezeichnet man den ersten Summanden der rechten Seite als das n-te Taylorpolynom von f bzgl. $x^{(0)}$ und r und den zweiten als Restglied.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.
1. Induktionsanfang $n = 0$: Aus $f \in C^1(U)$ folgt nach S. 16.5 $\partial_r f \in C^0(U)$ und damit nach dem HDI, Teil 2 (angwandt auf $s \mapsto f(x^{(0)} + sr)$)

$$f(x^{(0)} + tr) - f(x^{(0)}) = \int_0^t \partial_r f(x^{(0)} + sr)\, ds \,.$$

2. Induktionsschritt $n-1 \to n$: Es sei $f \in C^{n+1}(U)$. Ist $g(s) := \partial_r^n f(x^{(0)} + sr)$ für $s \in I[0,t]$, so ist $g'(s) = \partial_r^{n+1} f(x^{(0)} + sr)$. Also gilt nach Induktionsannahme und mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
f(x^{(0)} + tr) \quad - \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\partial_r^\nu f(x^{(0)})}{\nu!} t^\nu &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \partial_r^n f(x^(0) + sr)\, ds \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \left[-\frac{(t-s)^n}{n} \partial_r^n f(x^{(0)} + tr)|_0^t + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n} \partial_r^{n+1} f(x^{(0)} + sr)\, ds \right] \\
&= \frac{t^n}{n!} \partial_r^n f(x^{(0)}) + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \partial_r^{n+1} f(x^{(0)} + sr)\, ds \,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 16.8 Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so existiert ein $\xi \in I[x^{(0)}, x^{(0)} + tr]$ so, dass

$$\frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \partial_r^{n+1} f(x^{(0)} + sr)\, ds = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \partial_r^{n+1} f(\xi) \,.$$

Diese Form des Restgliedes nennt man auch *Lagrange-Form.*

(Denn: Man kann zeigen ([Ü]), dass folgende Variante eines (eindimensionalen) Mittelwertsatzes gilt: Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und sind $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie $g \in R[a,b]$ mit $g \geq 0$ auf $[a,b]$ (oder $g \leq 0$ auf $[a,b]$), so existiert ein $\tau \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b hg = h(\tau) \int_a^b g$$

Wendet man dies auf $g(s) := (t-s)^n/n!$ und $h(s) := \partial_r^{n+1} f(x^{(0)}+sr)$ mit $[a,b] := I[0,t]$ an, und beachtet man, dass

$$\frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \, ds = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

gilt, so ergibt sich die Existenz eines $\tau \in I[0,t]$ mit

$$\frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n \partial_r^{n+1} f(x^{(0)} + sr) \, ds = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \partial_r^{n+1} f(x^{(0)} + \tau r) \; .$$

Für $\xi := x^{(0)} + \tau r$ ergibt sich die Behauptung.)
Wir werden nun sehr bescheiden und betrachten speziell die Fälle $n = 0$ und $n = 1$. Ist

$$x := x^{(0)} + tr$$

und ist $f \in C^1(U)$, so ergibt sich die Existenz eines $\xi \in I[x^{(0)}, x]$ so, dass

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \partial_r f(\xi) t = f(x^{(0)}) + \operatorname{grad}^T f(\xi)(x - x^{(0)})$$

also wieder die Aussage des Mittelwertsatzes S. 15.20.
Ist $f \in C^2(U)$ so gilt für $y \in U$ nach S. 16.5

$$\partial_r^2 f(y) = \sum_{j,k=1}^{d} \partial_k \partial_j f(y) r_j r_k = r^T H f(y) r \; ,$$

wobei

$$Hf(y) := \big(\partial_k \partial_j f(y)\big)_{j,k=1,\ldots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

die sog. *Hesse-Matrix* von f an der Stelle y bezeichnet. Damit erhalten wir mit einem $\xi \in I[[x^{(0)}, x]$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x^{(0)}) + \partial_r f(x^{(0)}) t + \frac{1}{2} \partial_r^2 f(\xi) t^2 \\
&= f(x^{(0)}) + \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) r \cdot t + \frac{1}{2} r^T H f(\xi) r \cdot t^2 \\
&= f(x^{(0)}) + \operatorname{grad}^T f(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(0)})^T H f(\xi)(x - x^{(0)}) \; .
\end{aligned}$$

Bemerkung 16.9 Wir greifen nun speziell den Fall $d = 1$ auf (und schreiben x_0 statt $x^{(0)}$). Für $f \in C^{n+1}(U)$ und $r = 1$ ist $\partial_r^\nu f = f^\nu$auf U. Mit $x := x_0 + tr = x_0 + t$ ergibt sich die Existenz eines $\xi = \xi_{n,x_0}(x) \in I[x_0, x]$ mit

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} .$$

Dabei heißt

$$T_n(x) := T_{n,x_0}(x) := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$$

n-tes Taylorpolynom von f bzgl. der Entwicklungsmitte x_0 (und der Variable x). Ist $f \in C^\infty(U)$ und gilt dabei

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x_0}(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

so ist

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$$

Diese Reihe nennt man die Taylorreihe von f bzgl. der Entwicklungsmitte x_0 (man beachte: es handelt sich dabei um eine Potenzreihe).

Als wesentliche Anwendung des Taylor-Satzes werden wir nun ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema herleiten. Zunächst gilt folgendes wichtige **notwendige** Kriterium für Extremstellen.

Satz 16.10 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und es sei $f : U \to \mathbb{R}$. Ferner sei $x^{(0)} \in U$ so, dass* $\operatorname{grad} f(x^{(0)})$ *existiert. Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Extremum, so ist $x^{(0)}$ ein kritischer Punkt, d. h.*

$$\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = 0 .$$

Beweis. Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Extremum, so haben auch alle Funktionen $g_k : U_k \to \mathbb{R}$ mit

$$g_k(t) := f(x^{(0)} + te_k) \qquad (t \in U_k := \{s : x^{(0)} + se_k \in U\})$$

ein lokales Extremum an $t_0 = 0$. Also gilt nach S. 10.13 und D. 15.3

$$0 = g_k'(0) = \partial_k f(x^{(0)}) \qquad (k = 1, \ldots, d) .$$

□

Beispiel 16.11 1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (x,y \in \mathbb{R})\ .$$

Dann hat f an $(0,0)$ offenbar ein (sogar globales) Minimum. Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y)$, also tatsächlich $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$.
2. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad (x,y \in \mathbb{R})\ .$$

Dann gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x,-2y)$, also $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$. Trotzdem hat f an $(x_0, y_0) = (0,0)$ offenbar kein lokales Extremum, d. h. wie im Eindimensionalen ist die Bedingung "$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$" i. A. **nicht hinreichend** für das Vorliegen einer Extremstelle.

Definition 16.12 Es sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch. Dann heißt A

1. *positiv definit*, falls $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt,
2. *positiv semidefinit*, falls $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt,
3. *negativ (semi-) definit*, falls $-A$ positiv (semi-) definit ist,
4. *indefinit*, falls A weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Bemerkung 16.13 1. Ist $f \in C^2(U)$, für eine offene Menge U in $\mathbb{R}^d$, so ist die Hesse-Matrix

$$Hf(x) = \big(\partial_k \partial_j f(x)\big)_{j,k=1,\ldots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

nach dem Satz von Schwarz (S. 16.3) für alle $x \in U$ symmetrisch.
2. Für Charakterisierungen der Definitheitsbegriffe aus D. 16.12 verweisen wir auf die Lineare Algebra. Erwähnt werden soll hier nur folgendes: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ die Eigenwerte von A, so ist

$$A \left\{ \begin{array}{l} \text{positiv definit} \\ \text{positiv semidefinit} \\ \text{negativ definit} \\ \text{negativ semidefinit} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \ldots, \lambda_d > 0 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_d \geq 0 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_d < 0 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_d \leq 0 \end{array} \right\} .$$

Weiter ergibt sich im Falle $d = 2$:
$A = (a_{jk})$ ist genau dann positiv definit (bzw. semidefinit), wenn $\det(A) > 0$ (bzw. ≥ 0) und $a_{11} > 0$ (bzw. $a_{11}, a_{22} \geq 0$) gilt. Entsprechend ist A ist genau dann negativ definit (bzw. semidefinit), wenn $\det(A) > 0$ (bzw. ≥ 0) und $a_{11} < 0$ (bzw. $a_{11}, a_{22} \leq 0$) gilt.

Es gilt nun folgendes für die mehrdimensionale Optimierung zentrale Resultat

Satz 16.14 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, und es sei $f \in C^2(U)$. Ferner sei $x^{(0)} \in U$ ein kritischer Punkt (d. h.* $\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = 0$*). Dann gilt:*

1. *Ist $Hf(x^{(0)})$ positiv definit, so hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Minimum.*
2. *Ist $Hf(x^{(0)})$ negativ definit, so hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Maximum.*
3. *Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Minimum, so ist $Hf(x^{(0)})$ positiv semidefinit.*
4. *Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Maximum, so ist $Hf(x^{(0)})$ negativ semidefinit.*

Beweis. Es genügt, die Behauptungen 1. und 3. zu beweisen. Die Aussagen 2. und 4. ergeben sich dann durch Betrachtung von $-f$.
Dazu bemerken wir zunächst: Die Funktion $Hf : (U, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^{d\times d}, ||\cdot||)$ ist stetig. (Denn: Für $x \in U$ ist

$$Hf(x) = J(\operatorname{grad} f)(x)$$

und da nach Voraussetzung alle partiellen Ableitungen von $\operatorname{grad} f$ stetig auf U sind, ist Hf stetig auf U nach S. 15.13.)

1. Es sei $Hf(x^{(0)})$ positiv definit. Da die Funktion

$$\mathbb{R}^d \ni r \mapsto r^T Hf(x^{(0)}) r \in \mathbb{R}$$

stetig auf $\mathbb{R}^d$ und $S^{d-1} := \{r : |r| = 1\} \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist, existiert ein $r_0 \in S^{d-1}$ mit

$$r^T Hf(x^{(0)}) r \geq r_0^T Hf(x^{(0)}) r_0 =: \varepsilon > 0 \qquad (r \in S^{d-1}) .$$

Weiter existiert nach der Vorbemerkung ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit $||Hf(y) - Hf(x^{(0)})|| < \varepsilon$ für alle $y \in U_\delta(x^{(0)})$.
Es sei $x \in U_\delta(x^{(0)})$, $x \neq x^{(0)}$. Wir setzen

$$r := \frac{x - x^{(0)}}{|x - x^{(0)}|}, \qquad t := |x - x^{(0)}|.$$

Nach dem Taylor-Satz und B. 16.8 existiert ein $\xi \in I[x, x^{(0)}] \subset U_\delta(x^{(0)})$ mit

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x^{(0)})}{t^2} &= \frac{1}{2} r^T Hf(\xi) r \\ &= \frac{1}{2} r^T (Hf(\xi) - Hf(x^{(0)})) r + \frac{1}{2} r^T Hf(x^{(0)}) r \, . \end{aligned}$$

Weiter folgt mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und S. 15.11.1

$$\begin{aligned} |r^T(Hf(\xi) - Hf(x^{(0)}))r| &\leq |r^T| \cdot |(Hf(\xi) - Hf(x^{(0)})r| \\ &\leq ||Hf(\xi) - Hf(x^{(0)})|| < \varepsilon \;. \end{aligned}$$

Also ist $f(x) > f(x^{(0)})$. Damit liegt an $x^{(0)}$ ein (sogar striktes) lokales Minimum vor.

2. Die Funktion f habe an $x^{(0)}$ ein lokales Minimum. Angenommen, $Hf(x^{(0)})$ ist nicht positiv semidefinit. Dann existiert ein $r_1 \in S^{d-1}$ mit $r_1^T Hf(x^{(0)}) r_1 < 0$. Ist $\rho > 0$ so, dass $U_\rho(x^{(0)}) \subset U$, so gilt für

$$x^{(n)} := x^{(0)} + \frac{\rho}{n} r_1$$

wie in 1. mit einer Folge $(\xi^{(n)})$

$$\frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(0)})}{(\rho/n)^2} = \frac{1}{2} r_1^T (Hf(\xi^{(n)}) - Hf(x^{(0)})) r_1 + \frac{1}{2} r_1^T Hf(x^{(0)}) r_1 \;.$$

Aus $\xi^{(n)} \in I[x^{(n)}, x^{(0)}]$ folgt $\xi^{(n)} \to x^{(0)}$ $(n \to \infty)$ und damit $r_1^T(Hf(\xi^{(n)}) - Hf(x^{(0)}))r_1 \to 0\ (n \to \infty)$. Also ist $f(x^{(n)}) < f(x^{(0)})$ für alle genügend großen n. Widerspruch! $\square$

Beispiel 16.15 1. Ist $f(x,y) = x^2 + y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ (vgl. B. 16.11.1), so gilt

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

also ist Hf stets positiv definit. Insbesondere liegt am kritischen Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum vor.
2. Ist $f(x,y) = x^2 - y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ (vgl. B. 16.11.2) so gilt

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Hier ist Hf stets indefinit. Also hat f nach S. 16.14.3./4. keine lokalen Extrema.
3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \;.$$

Dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (6(x^2 - x)\;,\; 6(y^2 + y)) = (0,0)$$

genau dann, wenn $x \in \{0,1\}$ und $y \in \{0,-1\}$. Also haben wir die kritischen Stellen

$$(0,0)\;,\; (0,-1)\;,\; (1,0)\;,\; (1,-1)\;.$$

Weiter gilt

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 12y+6 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\begin{aligned} Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} && \text{indefinit} \\ Hf(0,-1) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} && \text{negativ definit} \\ Hf(1,0) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} && \text{positiv definit} \end{aligned}$$

und

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit}$$

Damit ist f an $(0,-1)$ ein lokales Maximum, an $(1,0)$ ein lokales Minimum und ansonsten keine Extremstellen.

17 Hauptsätze der mehrdimensionalen Analysis

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit zentralen Ergebnissen der mehrdimensionalen Analysis beschäftigen. Dazu starten wir mit einem sehr allgemeinen Hilfsresultat, das auch später noch an verschiedenen Stellen von Bedeutung sein wird.

Satz 17.1 *(Banachscher Fixpunktsatz)*
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und es sei $\varphi : X \to X$. Ferner existiere ein $\alpha < 1$ so, dass

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \alpha d(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

*(eine Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt α-*Kontraktion*). Dann existiert genau ein $x^* \in X$ mit $x^* = \varphi(x^*)$, also genau ein Fixpunkt von φ. Außerdem konvergiert für alle $x_0 \in X$ die Folge (x_n) mit*

$$x_{n+1} := \varphi(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

gegen x^* und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$d(x_n, x^*) \leq \alpha^n d(x_0, x^*) \left(\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \right) .$$

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n \cdot d(x_1, x_0) .$$

Also ist für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) . \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$, so existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon \qquad (n \geq N_\varepsilon) ,$$

also auch

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad (m > n \geq N_\varepsilon) .$$

Folglich ist (x_n) eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $x^* \in X$ mit $x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$. Da φ nach Voraussetzung insbesondere stetig auf X ist, gilt damit

$$x^* \leftarrow x_{n+1} = \varphi(x_n) \to \varphi(x^*) \qquad (n \to \infty)$$

d. h. $x^* = \varphi(x^*)$. Außerdem erhalten wir

$$d(x_n, x^*) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x^*)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x^*) \leq \ldots \leq \alpha^n d(x_0, x^*)$$

und zudem

$$d(x_0, x^*) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x^*) \leq d(x_0, x_1) + \alpha d(x_0, x^*) \ ,$$

also

$$(1-\alpha) d(x_0, x^*) \leq d(x_0, x_1) \ .$$

Ist schließlich $\tilde{x}$ ein weiterer Fixpunkt von φ, so ist

$$d(\tilde{x}, x^*) = d(\varphi(\tilde{x}), \varphi(x^*)) \leq \alpha d(\tilde{x}, x^*) \ ,$$

also $d(\tilde{x}, x^*) = 0$. □

Bemerkung 17.2 Oft kann man die Kontraktionseigenschaft unter Ausnutzung folgender Eigenschaft differenzierbarer Funktionen nachweisen:
Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ und $f : M \to \mathbb{R}^m$ sei stetig auf M sowie differenzierbar auf M^0. Sind $x, y \in M$ mit $I(x, y) \subset M^0$, so existiert ein $\xi \in I(x, y)$ mit

$$|f(y) - f(x)| \leq ||Jf(\xi)|| \cdot |y - x| \ .$$

(Denn: Es sei $g : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(u) := (f(y) - f(x))^T f(u) \qquad (u \in M) \ .$$

Dann ist g stetig auf M und es gilt mit der Kettenregel

$$\text{grad}^T g(u) = ((f(y) - f(x))^T (Jf)(u) \qquad (u \in M^0) \ .$$

Nach dem Mittelwertsatz (S. 15.20) existiert ein $\xi \in I(x, y)$ so, dass

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)|^2 &= g(y) - g(x) = \text{grad}^T g(\xi) \cdot (y - x) \\ &= (f(y) - f(x))^T Jf(\xi)(y - x) \leq |f(y) - f(x)| \cdot |Jf(\xi)(y - x)| \\ &\leq |f(y) - f(x)| \cdot ||Jf(\xi)|| \cdot |y - x| \ . \end{aligned}$$

Ist $f(x) = f(y)$, so ist die Behauptung klar und ist $f(x) \neq f(y)$ ergibt sich die Behauptung nach Division durch $|f(y) - f(x)|$.)

Wir beschäftigen uns nun mit der "lokalen Umkehrbarkeit" von Funktionen $f : M \to \mathbb{R}^d$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$. Ist $f : M \to N$ bijektiv, so bedeutet dies, dass für jedes $y = (y_1, \dots, y_d) \in N$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_d) &= y_1 \\ &\vdots \\ f_d(x_1, \dots, x_d) &= y_d \end{aligned}$$

genau eine Lösung $x = (x_1, \dots, x_d) \in M$ besitzt. Betrachten wir zunächst zwei bekannte Spezialfälle:
1. Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiert durch

$$f(x) := Ax \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist, so ist das lineare Gleichungssystem

$$Ax = f(x) = y$$

genau dann für alle $y \in \mathbb{R}^d$ eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$ ist. In diesem Falle ist also $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bijektiv, und es gilt bekanntlich

$$x = f^{-1}(y) = A^{-1}y \qquad (y \in \mathbb{R}^d) \; .$$

2. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \Omega$, so existiert ein $\delta > 0$so, dass $f'(x)$ entweder durchgehend > 0 oder < 0 auf $U := U_\delta(x_0)$ und damit f streng monoton auf U ist. Also existiert $f^{-1} := (f_{|U})^{-1}$ auf $V = f(U)$ und es gilt für $y = f(x) \in V$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \; .$$

Wir setzen für eine offene Menge $\Omega \in \mathbb{R}^d$ und $k, m \in \mathbb{N}$

$$C^k(\Omega, \mathbb{K}^m) := \{f = (f_1, \dots, f_m)^T : \Omega \to \mathbb{K}^m : f_1, \dots, f_m \in C^k(\Omega)\} \; .$$

Insbesondere gilt dabei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{K}^d)$ genau dann, wenn $f : \Omega \to \mathbb{K}^d$ differenzierbar und $Jf : \Omega \to \mathbb{K}^{m \times d}$ (versehen mit der Operatornorm $|| \cdot ||$) stetig ist.
(Dies ergibt sich leicht daraus, dass für beliebige Matrizen $A = (a_{jk})$, $A_n = (a_{jk}^{(n)}) \in \mathbb{K}^{m \times d}$ genau dann $||A_n - A|| \to 0$ gilt, wenn $a_{jk}^{(n)} \to a_{jk}$ $(n \to \infty)$ für alle j, k erfüllt ist ([Ü]).)

Satz 17.3 *(Hauptsatz über Umkehrfunktionen)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, und es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Ferner sei $x^{(0)} \in \Omega$ mit

$$\det Jf(x^{(0)}) \neq 0 \; .$$

Dann gilt:

1. *Es existieren offene Umgebungen U von $x^{(0)}$ und V von $y^{(0)} := f(x^{(0)})$ so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist.*

2. *Ist $f^{-1} = (f_{|U})^{-1} : V \to U$, so ist $f^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^d)$ und für $y = f(x) \in V$ gilt*

$$Jf^{-1}(y) = [Jf(x)]^{-1} .$$

Beweis. 1. Wir setzen $A := Jf(x^{(0)})$. Nach Voraussetzung existiert $A^{-1}(\neq 0)$. Da $x \mapsto Jf(x)$ stetig auf Ω ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass für $\varepsilon := (2||A^{-1}||)^{-1}$ gilt

$$||Jf(x) - A|| < \varepsilon \qquad \left(x \in U_\delta(x^{(0)})\right) .$$

Damit definieren wir

$$U := U_\delta(x^{(0)}) , \qquad V := f(U)$$

und zeigen:

(i) $f_{|U} : U \to V$ ist injektiv (also bijektiv), d. h. $g := (f_{|U})^{-1}$ existiert

(ii) $V \subset \mathbb{R}^d$ ist offen

(iii) $\det Jf(x) \neq 0 \quad (x \in U)$

(iv) $g \in C^1(V, \mathbb{R}^d)$ und $Jg(y) = [Jf(x)]^{-1}$ für alle $y \in V$, $y = f(x)$.

An verschiedenen Stellen wird folgende Hilfsfunktion von Nutzen sein: Es sei $y \in V$ und $\varphi = \varphi_y : U \to \mathbb{R}^d$ definiert durch

$$\varphi(x) := x + A^{-1}(y - f(x)) \qquad (x \in U) .$$

Dann ist $\varphi(x) = x$ genau dann, wenn $y = f(x)$ gilt. Ferner gilt für $x \in U$

$$J\varphi(x) = E - A^{-1}Jf(x) = A^{-1}(A - Jf(x))$$

und damit

$$||J\varphi(x)|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||A - Jf(x)|| < ||A^{-1}||\varepsilon = \frac{1}{2} .$$

Also gilt nach B. 17.2 für $x, \tilde{x} \in U$

$$|\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})| \leq \frac{1}{2}|x - \tilde{x}| .$$

2. Zu (i): Es sei $y \in V$ und $\varphi = \varphi_y$ wie in 1. Es genügt zu zeigen: φ hat höchstens einen Fixpunkt. Sind $x, \tilde{x}$ Fixpunkte von φ, so gilt nach 1.

$$|x - \tilde{x}| = |\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})| \leq \frac{1}{2}|x - \tilde{x}| ,$$

also $x = \tilde{x}$.

Zu (ii): Es sei $y^{(1)} = f(x^{(1)}) \in V$. Da $U = U_\delta(x^{(0)})$ offen ist, existiert ein $\rho > 0$ mit $\overline{U_\rho(x^{(1)})} =: M \subset U$. Wir setzen $\eta := \varepsilon\rho$ und zeigen: $U_\eta(y^{(1)}) \subset V$.
Dazu sei $y \in U_\eta(y^{(1)})$ gegeben und $\varphi = \varphi_y$ wie in 1. Dann gilt $\varphi(M) \subset M$, denn für $x \in M$ ist

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - x^{(1)}| &\leq |\varphi(x) - \varphi(x^{(1)})| + |\varphi(x^{(1)}) - x^{(1)}| \\
&\leq \frac{1}{2}|x - x^{(1)}| + |A^{-1}(y - f(x^{(1)}))| \\
&\leq \frac{1}{2}|x - x^{(1)}| + ||A^{-1}|| \cdot |y - y^{(1)}| \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho
\end{aligned}$$

also $\varphi(x) \in M$.
Außerdem ist nach 1. $\varphi : M \to M$ nach B. 17.2 eine 1/2-Kontraktion. S. 17.1 zeigt, dass (genau) ein $x \in M$ existiert mit $\varphi(x) = x$, also $f(x) = y$.

3. Es gilt nach 1. (wobei $\varphi = \varphi_y$ mit einem beliebigen $y \in V$)

$$Jf(x) = A \cdot (E - J\varphi(x)) \qquad (x \in U)$$

also

$$\det Jf(x) = \det(A) \cdot \det(E - J\varphi(x)) \qquad (x \in U)\ .$$

Wieder nach 1. ist $||J\varphi(x)|| \leq \frac{1}{2}$ $(x \in U)$ und damit ist $E - J\varphi(x)$ invertierbar. (Es gilt $(E - B)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B^\nu$, falls $||B|| < 1$ ist; [Ü]). Also ist auch $\det Jf(x) \neq 0$.

4. Wir betrachten ein beliebiges $y^{(1)} \in V$. Ist $\varphi = \varphi_{y^{(1)}}$ wie in 1. und $y^{(1)} = f(x^{(1)})$, so gilt

$$\varphi(x) = x + A^{-1}\left(f(x^{(1)}) - f(x)\right)$$

also für $x \in U$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|x - x^{(1)}| &\geq |\varphi(x) - \varphi(x^{(1)})| = \\
&= |x - x^{(1)} + A^{-1}(f(x^{(1)}) - f(x))| \\
&\geq |x - x^{(1)}| - ||A^{-1}|| \cdot |f(x^{(1)}) - f(x)|
\end{aligned}$$

und damit

$$|f(x) - f(x^{(1)})| \geq \frac{1}{2||A^{-1}||}|x - x^{(1)}| = \varepsilon|x - x^{(1)}|\ . \qquad (*)$$

Für $y \in V$, $y \neq y^{(1)}$, folgt mit $y = f(x)$

$$\frac{|g(y) - g(y^{(1)}) - [Jf(x^{(1)})]^{-1}(y - y^{(1)})|}{|y - y^{(1)}|} \leq$$

$$\leq ||[Jf(x^{(1)})]^{-1}|| \frac{|Jf(x^{(1)})(x - x^{(1)}) - (f(x) - f(x^{(1)}))|}{|f(x) - f(x^{(1)})|}$$

$$\leq \frac{||[Jf(x^{(1)})]^{-1}||}{\varepsilon} \frac{|f(x) - f(x^{(1)}) - Jf(x^{(1)})(x - x^{(1)})|}{|x - x^{(1)}|} \to 0 \quad (x \to x^{(1)})\ .$$

Ist $(y^{(n)})_{n\geq 2}$ eine Folge in V mit $y^{(n)} \to y^{(1)}$, so folgt $x^{(n)} = g(y^{(n)}) \to x^{(1)} = g(x^{(1)})$ aus $(*)$. Also ist g differenzierbar an $y^{(1)}$ und es gilt mit S. 15.10

$$Jg(y^{(1)}) = [Jf(x^{(1)})]^{-1} = [Jf(f^{-1}(y^{(1)}))]^{-1} \; .$$

Da $A \mapsto A^{-1}$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}^{d\times d}\backslash\{B : \det(B) = 0\}$ in sich selbst ist (bzgl. der Operatornorm)([Ü]), ist $y \mapsto Jg(y)$ als Verknüpfung der stetigen Abbildungen g sowie $x \mapsto Jf(x)$ und $A \mapsto A^{-1}$ stetig auf V. Dies ist äquivalent dazu, dass g in $C^1(V, \mathbb{R}^d)$ liegt. □

Beispiel 17.4 Wir betrachten $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (r > 0, \varphi \in \mathbb{R}) \; .$$

Dann ist $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, wobei $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, und es gilt

$$\det Jf(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0 \; .$$

Also existiert nach S. 17.3 zu jedem $(r_0, \varphi_0) \in \Omega$ eine Umgebung U von (r_0, φ_0) so, dass $f : U \to f(U) = V$ bijektiv ist. Außerdem ist V offen und $f^{-1} = (f_{|U})^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^2)$. Jedoch ist f nicht umkehrbar auf ganz Ω!

Wie sehen "maximale" offene Mengen aus, auf denen f umkehrbar ist?

Ist $f(r, \varphi) = f(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$, so gilt $r\cos\varphi = \tilde{r}\cos\tilde{\varphi}$ und $r\sin\varphi = \tilde{r}\sin\tilde{\varphi}$, also

$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \tilde{r}^2(\cos^2\tilde{\varphi} + \sin^2\tilde{\varphi})$$

und damit $r = \tilde{r}$. Folglich gilt $\cos\varphi = \cos\tilde{\varphi}$ und $\sin\varphi = \sin\tilde{\varphi}$, woraus wiederum $\tilde{\varphi} = \varphi + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ folgt. Also ist f etwa umkehrbar auf

$$U = U_\alpha = \{(r, \varphi) \in \Omega : \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi\}$$

für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$. Auf jeder echten offenen Obermenge von U_α ist f nicht mehr umkehrbar. Außerdem gilt $f(U_\alpha) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha) : r > 0\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Wie sieht eine (nicht **die**) Umkehrfunktion aus? Betrachten wir

$$U = U_{-\pi/2} = \left\{(r, \varphi) : r > 0 \; , \; \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2} \, , \frac{3}{2}\pi\right)\right\} \; .$$

Ist $(x, y) \in f(U_{-\pi/2})$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

so gilt $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Für $x=0$ ist $\varphi = \pi/2$. Ist $x \neq 0$, so folgt

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi$$

also

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) & , \quad \text{falls } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & , \quad \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

(beachte: $\cos\varphi > 0$, falls $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$). Insgesamt erhalten wir

$$f^{-1}(x,y) = (f_{|U_{-\pi/2}})^{-1}(x,y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)\right) & , \quad \text{falls } x > 0 \\ (y, \pi/2) & , \quad \text{falls } x = 0 \\ \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x) + \pi\right) & , \quad \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

In enger Beziehung zum Hauptsatz über Umkehrfunktionen steht ein weiterer Hauptsatz: der über implizite Funktionen. Worum geht es dabei?
Gegeben ist eine Funktion $F : M \to \mathbb{R}^m$ mit $M \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ und damit das Gleichungssystem

$$F(x,y) = 0$$

wobei $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m = \{(x,y) : x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d \ , \ y = (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m\}$, d. h.

$$\begin{aligned} F_1(x_1,\ldots,x_d,\, y_1,\ldots,y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1,\ldots,x_d,\, y_1,\ldots,y_m) &= 0 \end{aligned}$$

(also $d{+}m$ "Unbekannte" und m Gleichungen). Ferner sei $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in M$ eine Lösung, also $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$. Ziel ist, das Gleichungssystem "lokal nach y aufzulösen", d. h. wir suchen Umgebungen U von $x^{(0)}$ und W von $(x^{(0)}, y^{(0)})$ sowie eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ so, dass für alle $(x,y) \in W$ gilt

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) .$$

Wir orientieren uns wieder an zwei einfachen Beispielen

Beispiel 17.5 1. Wir betrachten die Gleichung

$$F(x,y) := x^2 - y^2 - 1 = 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

Dann ist offenbar $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 1)$ eine Lösung der Gleichung. Hier gilt etwa für $U := (1,\infty)$ und $W := (1,\infty) \times (0,\infty)$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2-1} =: f(x)$$

(d. h. $\{(x,y) \in W : F(x,y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in U\}$; die Lösungsmenge ist lokal der Graph der Funktion f). Dies ist etwa falsch für $W = (1,\infty) \times \mathbb{R}$.
2. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sowie $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mit

$$F(x,y) = Ax + By = (A \;\; B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(also lineares GLS $Ax + By = 0$). Dann gilt im Falle $\det B \neq 0$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow By = -Ax \Leftrightarrow y = -B^{-1}Ax =: f(x)$$

also $L := \{(x,y) : F(x,y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^d\}$.

Satz 17.6 *(Hauptsatz über implizite Funktionen)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ offen und es sei $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) := \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial y_\nu}(x,y)\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,m} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) := \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x_\nu}(x,y)\right)_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,d}} .$$

Ferner sei $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \Omega$ so, dass $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ und

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0 .$$

Dann gilt

1. *Es existieren offene Umgebungen U von $x^{(0)}$ und W von $(x^{(0)}, y^{(0)})$ sowie eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ so, dass für $(x,y) \in W$ gilt*

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) .$$

2. *Es ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ und*

$$Jf(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \qquad (x \in U) .$$

Beweis. 1. Wir betrachten $G : \Omega \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ mit

$$G(x,y) = \Big(x, F(x,y)\Big) \qquad \Big((x,y) \in \Omega\Big) .$$

Dann gilt $G(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x^{(0)}, 0)$ und $G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$. Außerdem ist

$$JG(x,y) = \begin{bmatrix} E_d & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \vdots & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

und damit $\det JG(x^{(0)}, y^{(0)}) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$. Nach S. 17.3 existieren offene Umgebungen R von $(x^{(0)}, y^{(0)})$ und S von $(x^{(0)}, 0) = G(x^{(0)}, y^{(0)})$ so, dass $G_{|R} : W \to S$ bijektiv ist mit

$$G^{-1} = (G_{|R})^{-1} \in C^1(S, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m) .$$

Da S offen ist, existieren offene Umgebungen U von $x^{(0)}$ und V von 0 mit $U \times V \subset S$. Dann ist $W := G^{-1}(U \times V)$ offen in R (nach S. 9.19) also auch in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$. Aus der Definition von G ergibt sich, dass G^{-1} von der Form

$$G^{-1}(x, z) = (x, H(x, z)) \qquad ((x, z) \in U \times V)$$

mit $H \in C^1(U \times V, \mathbb{R}^m)$ ist.
Ist $\pi_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $\pi_2(x, y) := y$, so gilt

$$\pi_2(G(x, y)) = \pi_2(x, F(x, y)) = F(x, y) \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

also für $(x, z) \in U \times V$:

$$F(x, H(x, z)) = \pi_2(G(x, H(x, z))) = \pi_2(x, z) = z .$$

Definiert man $f : U \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x) := H(x, 0) \qquad (x \in U)$$

so gilt für $x \in U$

$$F(x, f(x)) = 0$$

und aus $F(x, y) = 0$ für ein $(x, y) \in W$ folgt

$$G(x, y) = (x, 0) = G(G^{-1}(x, 0)) = G(x, f(x))$$

und damit, da $G_{|W}$ bijektiv ist, $y = f(x)$. Also ergibt sich 1.
2. Weiter folgt aus $H \in C^1(S, \mathbb{R}^m)$ auch $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ und mit der Kettenregel ergibt sich aus

$$\varphi(x) := F(x, f(x)) \equiv 0 \qquad (x \in U)$$

schließlich

$$0 = J\varphi(x) = JF(x, f(x)) \cdot \begin{pmatrix} E_d \\ Jf(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) Jf(x)$$

und damit

$$Jf(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \qquad (x \in U) .$$

(Man beachte dabei: Es gilt nach S. 17.3

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \det JG(x, y) \neq 0$$

für alle $(x, y) \in W$.) □

Beispiel 17.7 (Lemniskate)
Es sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \qquad (x, y \in \mathbb{R})\ .$$

Dann gilt

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2(x^2 + y^2)2y + 4y = 4y(x^2 + y^2 + 1)$$

genau dann, wenn $y = 0$ ist. Ist $y = 0$ und $F(x, y) = 0$, so gilt $x^4 - 2x^2 = 0$, also $x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2}$.
Nach S. 17.6 ist für alle (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ und $(x_0, y_0) \notin \{(0, 0), (\pm\sqrt{2}, 0)\}$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ auf einer Umgebung W von (x_0, y_0) "auflösbar nach y".
"Implizites Differenzieren" ergibt für die Funktion $f = f_{(x_0,y_0)}$ aus S. 17.6

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = \frac{4x(x^2 + y^2 - 1)}{4y(x^2 + y^2 + 1)}_{|y=f(x)}$$

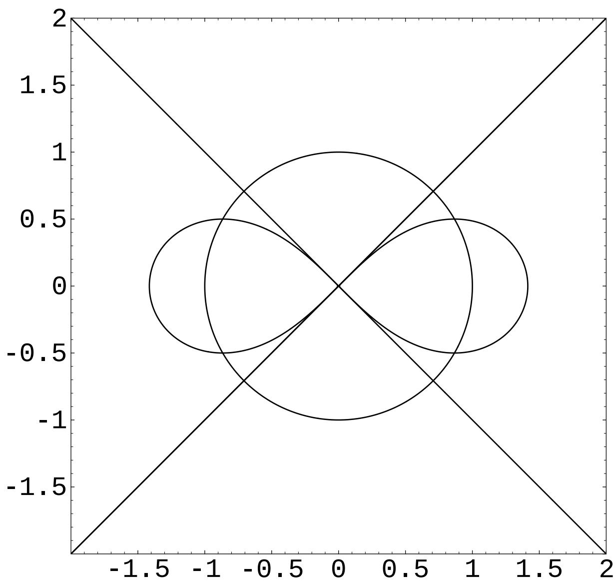
auf einer Umgebung U von x_0. Also hat f Extremstellen höchstens in Punkten x mit

$$x^2 + f^2(x) = x^2 + y^2 = 1\ .$$

Um eine Vorstellung von der Lösungsmenge zu bekommen, betrachten wir Polarkoordinaten: Es gilt für $(x, y) \neq 0$

$$0 = F(x, y) = F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^4 - 2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(r^2 - 2\cos 2\varphi)$$

genau dann, wenn $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$, wobei φ so, dass $\cos(2\varphi) > 0$ ist (beachte: $r > 0$).



Eine wichtige Anwendung des Hauptsatzes über implizite Funktionen ergibt sich im Bereich der Optimierung unter Nebenbedingungen. Wir untersuchen folgendes Problem:
Gegeben sind Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}^m$, wobei $M \subset \mathbb{R}^d$. Gesucht sind die "Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$".

Wir wollen dies in einer Definition etwas präzisieren

Definition 17.8 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$, und es seien $f : M \to \mathbb{R}$ sowie $g : M \to \mathbb{R}^m$. Ist

$$L := \{x \in M : g(x) = 0\}$$

und ist $x^{(0)} \in L$, so heißt $x^{(0)}$ ein *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*) *von f unter der Nebenbedingung* $g(x) = 0$, falls $x^{(0)}$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum) von $f_{|L}$ ist.

Der folgende Satz liefert eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer solchen Extremstelle

Satz 17.9 *(Lagrange)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und es seien $f \in C^1(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $m < d$. Ferner sei $x^{(0)} \in \Omega$ so, dass

$$\mathrm{Rang}\big(Jg(x^{(0)})\big) = m$$

ist. Dann gilt: Hat f an $x^{(0)}$ ein lokales Maximum oder Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\mathrm{grad}\ f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ \mathrm{grad}\ g_j(x^{(0)}) = (Jg)^T(x^{(0)})\lambda$$

(die Komponenten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von λ heißen "Lagrange-Multiplikatoren").

Beweis. Wir schreiben zur Abkürzung $x = (y, z)$ mit

$$y = (x_1, \ldots, x_m)\,,\ z = (x_{m+1}, \ldots, x_d)$$

für $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ und insbesondere

$$(y^{(0)}, z^{(0)}) = x^{(0)}\ .$$

O. E. gelte

$$\det\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x^{(0)})\right) = \det\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}(x^{(0)})\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,m} \neq 0\ ,$$

d. h. $\frac{\partial g}{\partial y}(x^{(0)})$ habe vollen Rang m. Dann hat das lineare Gleichungssystem

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^T (x^{(0)}) \cdot \lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T (x^{(0)})$$

genau eine Lösung $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$.
Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen ist weiterhin $g(x) = g(y, z) = 0$ an $x^{(0)}$ "lokal nach y auflösbar". Insbesondere existieren eine Umgebung U von $z^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_d^{(0)})$ sowie eine Funktion $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ so, dass $\varphi(z^{(0)}) = y^{(0)}$ und

$$g(\varphi(z), z) \equiv 0 \qquad (z \in U)$$

gilt. Hieraus folgt

$$0 = Jg(x^{(0)}) \begin{pmatrix} J\varphi(z^{(0)}) \\ E_{d-m} \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial y}(x^{(0)}) J\varphi(z^{(0)}) + \frac{\partial g}{\partial z}(x^{(0)})$$

Schließlich definieren wir $F \in C^1(U)$ durch

$$F(z) := f(\varphi(z), z) \quad (z \in U)\ .$$

Nach Voraussetzung hat F an $z^{(0)}$ ein lokales Extremum (ohne Nebenbedingung). Also gilt nach S. 16.10

$$\operatorname{grad} F(z^{(0)}) = 0$$

und mit der Kettenregel daher

$$0 = \operatorname{grad}^T f(x^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} J\varphi(z^{(0)}) \\ E_{d-m} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x^{(0)}) J\varphi(z^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial z}(x^{(0)})\ .$$

Hieraus ergibt sich wiederum

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x^{(0)}) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x^{(0)}) J\varphi(z^{(0)}) = -\lambda^T \frac{\partial g}{\partial y}(x^{(0)}) J\varphi(z^{(0)}) = \lambda^T \frac{\partial g}{\partial z}(x^{(0)})$$

und damit insgesamt $\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = (Jg)^T(x^{(0)})\lambda$. □

Bemerkung 17.10 Ähnlich wie S. 16.10 liefert S. 17.9 lediglich eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Um die entsprechenden Punkte $x^{(0)}$ zu bestimmen, hat man die Gleichungen

$$g_j(x_1, \ldots, x_d) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_d) \qquad (k = 1, \ldots, d)$$

zu lösen (also $(d+m)$ Gleichungen für die $(d+m)$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_d$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$).

Beispiel 17.11 Die Produktion eines Unternehmens sei in Abhängigkeit der Produktionsfaktoren x, y beschrieben durch die (Cobb-Douglas-) Funktion

$$P(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha} \qquad (x, y > 0)$$

wobei $\alpha \in (0,1)$ fest ist. Die Produktionskosten seien gegeben durch eine lineare Kostenfunktion K der Form

$$K(x,y) = px + qy \qquad (x, y > 0)$$

mit Konstanten $p, q > 0$. Gesucht ist eine kostenminimale Faktorkombination (x, y) zu einem vorgegebenen Produktionsniveau $c > 0$, d. h. wir wollen das Optimierungsproblem

$$K(x,y) \stackrel{!}{\to} \min$$

unter der Nebenbedingung

$$P(x,y) - c = 0$$

lösen. Nach S. 17.9 ist eine notwendige Bedingung gegeben durch

$$\operatorname{grad} K(x,y) = \lambda \operatorname{grad} P(x,y) \ ,$$

d. h. wir haben die 3 Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} x^\alpha y^{1-\alpha} & = & c \\ p & = & \lambda \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} \\ q & = & \lambda(1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha} \end{array}$$

für die Unbekannten x, y, λ. Division der 2. und 3. Gleichung ergibt

$$x = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{q}{p} \cdot y$$

und mit der 1. Gleichung erhalten wir

$$y = c \left(\frac{p(1-\alpha)}{q\alpha} \right)^\alpha$$

und damit

$$x = c \left(\frac{q\alpha}{p(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha} \ .$$

Also kann nur an dieser Stelle (x, y) ein Minimum unter der Nebenbedingung vorliegen. Man kann sich überlegen, dass dies tatsächlich der Fall ist.

18 Gewöhnliche Differenzialgleichungen: einfache Beispiele und Lösungemethoden

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, in denen eine unabhängige Variable, Funktionen und Ableitungen der Funktionen auftauchen. Dabei bezeichnen wir die unabhängige Variable meist mit t (Zeit). Bevor wir uns mit der allgemeinen Theorie beschäftigen, betrachten wir einige einfache Spezialfälle mit Anwendungsbeispielen.

Beispiel 18.1 Wir betrachten ein sehr vereinfachtes Keynesianisches Modell des Wachstums einer Volkswirtschaft. Ist Y das (Volks)einkommen (etwa gemessen als Bruttosozialprodukt), so besagt der Keynesianische Ansatz, dass das die Veränderung Y' proportional zur Differenz von Nachfrage D und Einkommen ist, d.h.

$$Y'(t) = k(D(t) - Y(t)) \qquad \text{oder kurz } Y' = k(D - Y) \ ,$$

wobei k eine positive Konstante ist. Weiter nimmt man an, dass die Nachfrage D sich als Summe aus privatem Konsum C, Investitionen I und Staatsausgaben G ergibt (geschlossene Volkswirtschaft; ohne Ausland). Ein weiter vereinfachtes Modell geht davon aus, dass I und G konstant sind (man schreibt $I = \bar{I}, G = \bar{G}$), und dass $C(t)$ von der Form $C(t) = c_0 + cY(t)$ mit Konstanten $c_0 > 0$ und $c \in (0,1)$ ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Y'(t) &= k(c_0 + cY(t) + \bar{I} + \bar{G} - Y(t)) = \\ &= -k(1-c)Y(t) + k(c_0 + \bar{I} + \bar{G}) =: -\alpha Y(t) + \beta \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Gesucht ist nun eine Funktion Y, die die Gleichung unter der „Anfangsbedingung" $Y(0) = Y_0$ löst.

Definition 18.2 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f : D \to \mathbb{K}^d$ stetig. Wir schreiben ein Element aus $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ meist in der Form (t, y), wobei $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{K}^d$ ist.

1. Eine *(gewöhnliche) Differenzialgleichung (1. Ordnung)* (bzw. *System gewöhnlicher Differenzialgleichungen (1. Ordnung)*) ist eine Gleichung der Form

   $$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{18.1}$$

   oder kurz

   $$y' = f(t, y) \ ,$$

   wobei $y'(t) = (y_1'(t), ..., y_d'(t))$.

2. Eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}^d$ bzw. das Paar (φ, I) heißt *Lösung* der Differenzialgleichung (18.1) falls φ differenzierbar auf (dem Intervall) I ist, falls

$$\operatorname{graph}(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset D$$

gilt, und falls (18.1) für alle $t \in I$ erfüllt ist, d.h.

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad \text{für alle} \quad t \in I\,.$$

3. Ist $(t_0, y^{(0)}) \in D$, so heißt ein Gleichungssystem der Form

$$y' = f(t, y) \qquad\qquad y(t_0) = y^{(0)} \tag{18.2}$$

ein *Anfangswertproblem* (für die Differenzialgleichung (18.1)) (kurz: AWP). Ist $t_0 \in I$ und ist (φ, I) eine Lösung von (18.1) mit $\varphi(t_0) = y^{(0)}$, so heißt φ bzw. (φ, I) *Lösung des AWP* (18.2).

Ist $d = 1$, so nennt man (18.1) auch *skalare* Differenzialgleichung. In diesem Fall haben wir eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}$ (reell- oder komplexwertig).
Ist weiterhin speziell $D = I \times J$ mit Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ und f von der Form

$$f(t, y) = h(t)g(y)$$

mit $h : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$, so spricht man von einer *Differenzialgleichung mit getrennten Veränderlichen* (oder von einer *separierbaren Differenzialgleichung*). In B.18.1 haben wir eine solche Gleichung mit $h(t) \equiv 1$ und $g(y) = \beta - \alpha y$ vorliegen. Wir beschäftigen uns zunächst mit Lösungen solcher Gleichungen.
Ist $g(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in J$, so ist offenbar $\varphi(t) \equiv y_0$ eine Lösung von $y' = h(t)g(y)$ auf $\mathbb{R}$ (sog. triviale oder stationäre Lsung).
Das folgende Beispiel zeigt, dass unter Umständen mehrere Lösungen existieren können.

Beispiel 18.3 Es sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und

$$f(t, y) = g(y) = \begin{cases} \sqrt{y}\,, & \text{falls } y \geq 0 \\ 0\,, & \text{falls } y < 0 \end{cases}\,.$$

Dann ist offenbar $\varphi(t) \equiv 0$ eine Lösung des AWP

$$y' = g(y)\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

Man rechnet nach, dass auch die Funktionen

$$\varphi_c(t) := \begin{cases} (t-c)^2/4\,, & \text{falls } t \geq c \\ 0\,, & \text{falls } t < c \end{cases}$$

für alle $c \geq 0$ Lösungen des AWPs darstellen. Also haben wir unendlich viele Lösungen.

Im Falle $g(y_0) \neq 0$ treten entsprechende Probleme nicht auf:

Satz 18.4 *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, und es seien $h : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner gelte*

$$g(y) \neq 0 \qquad (y \in J)\,.$$

Ist $t_0 \in I$, $y_0 \in J$ und

$$H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)ds \quad (t \in I), \qquad G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} \quad (y \in J),$$

so hat das AWP

$$y' = h(t)g(y)\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

auf jedem Intervall $I_0 \subset I$ mit $t_0 \in I_0$ und $H(I_0) \subset G(J)$ genau eine Lösung (φ, I_0), und diese ergibt sich durch Auflösen der Gleichung

$$G(y) = H(t)$$

nach y (d.h. $\varphi(t) = G^{-1}(H(t))$ $(t \in I_0)$).

Beweis. 1. Da $G'(y) = 1/g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ gilt, ist $G' > 0$ oder $G' > 0$ durchgehend auf J (da G' stetig auf J) und damit G streng monoton (wachsend oder fallend) auf J. Also besitzt G eine Umkehrfunktion $G^{-1} : G(J) \to J$. Ist $I_0 \subset I$ mit $t_0 \in I_0$ und $H(I_0) \subset G(J)$, so betrachten wir $\varphi : I_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) = G^{-1}(H(t)) \qquad (t \in I_0)\,.$$

Dann gilt

$$\varphi'(t) \overset{S.10.9}{=} \frac{1}{G'(G^{-1}(H(t)))} \cdot H'(t) = g(\varphi(t))h(t) \qquad (t \in I_0)$$

und $\varphi(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = y_0$, d.h. (φ, I_0) löst das AWP.
2. Ist (ψ, I_0) eine weitere Lösung des AWP, so gilt

$$\frac{\psi'(t)}{g(\psi(t))} = h(t) \qquad (t \in I_0)$$

und damit für alle $t \in I_0$ (Substitution $u = \psi(s)$)

$$G(\psi(t)) = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{g(\psi(s))} ds = \int_{t_0}^{t} h(s)ds = H(t)$$

d.h.

$$\psi(t) = G^{-1}(H(t)) = \varphi(t)\,.$$

□

Satz 18.4 erweist sich als äußerst nützlich, da die Aussage „konstruktiv" ist, d.h. es wird ein Verfahren zur Berechnung der Lösung geliefert. Im Wesentlichen hat man zwei Stammfunktionen (H und G) zu berechnen und die Umkehrfunktion von G anzuwenden.

Beispiel 18.5 1. Wir betrachten das AWP $Y' = -\alpha Y + \beta$; $Y(0) = Y_0$ aus B. 18.1, wobei wir zunächst $Y_0 < \beta/\alpha$ annehmen.
Dann ist das AWP nach S. 18.4 (jedenfalls für $|t|$ genügend klein) eindeutig lösbar, und die Lösung ergibt sich aus

$$t = \int_0^t ds = \int_{Y_0}^{Y} \frac{ds}{\beta - \alpha s} = \frac{1}{\alpha} \ln(\beta - \alpha s)|_{Y_0}^{Y} = -\frac{1}{\alpha}\Big(\ln(\beta - \alpha Y) - \ln(\beta - \alpha Y_0)\Big) ,$$

also

$$\ln(\beta - \alpha Y) = -\alpha t + \ln(\beta - \alpha Y_0)$$

d.h.

$$Y = Y(t) = \beta/\alpha - e^{-\alpha t}(\beta/\alpha - Y_0) = \frac{c_0 + \bar{I} + \bar{G}}{1-c} - e^{-k(1-c)t}\big(\frac{c_0 + \bar{I} + \bar{G}}{1-c} - Y_0\big)$$

Dies ist eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$, wie man sofort durch Nachrechnen sieht.
Eine entsprechende Rechnung gilt für $Y_0 > \beta/\alpha$ und im Falle $Y_0 = \beta/\alpha$ hat man die triviale Lösung $Y(t) \equiv \beta/\alpha$.
2. Wir betrachten die in der Populationsdynamik zur Modellierung von Tier- oder Pflanzenpopulationen oft verwendete sogenannte logistische Gleichung

$$y' = g(y) = ay(b - y) ,$$

wobei $a, b > 0$ Konstanten sind. Wir suchen die Lösung des AWP

$$y' = g(y) , \qquad y(0) = y_0$$

mit $y_0 > 0$. Ist $y_0 = b$, so ist $g(y_0) = 0$, und damit ist $y \equiv b$ eine Lösung des AWP (unter Umständen nicht die einzige).
Es sei nun $y_0 \neq b$. Dann erhalten wir nach S. 18.4 die Lösung aus

$$\begin{aligned} t = \int_0^t ds \quad &= \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s(b-s)} = \frac{1}{ab}\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s} + \frac{1}{ab}\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{b-s} \\ &= \frac{1}{ab}\big[\ln|y| - \ln|b-y| + \ln|b-y_0| - \ln|y_0|\big] \end{aligned}$$

d.h.

$$\left|\frac{y}{b-y}\right| = e^{abt}\left|\frac{y_0}{b-y_0}\right| .$$

Für $y_0 < b$ erhalten wir (da dann auch $y(t) < b$ für $|t|$ klein)

$$\frac{y}{b-y} = \frac{b}{b-y} - 1 = e^{abt} \cdot \frac{y_0}{b-y_0}$$

bzw.

$$y = y(t) = b\left(\frac{e^{abt}\frac{y_0}{b-y_0}}{1+e^{abt}\frac{y_0}{b-y_0}}\right) = \frac{b}{1+(\frac{b}{y_0}-1)e^{-abt}}\,.$$

Eine entsprechende Rechnung gilt für $y_0 > b$.

3. Wir betrachten mit $I = J = \mathbb{R}$ das AWP

$$y' = h(t)g(y) = e^t(1+y^2)\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

Die Lösung ergibt sich wieder nach S. 18.4 (auf einer Umgebung von $t_0 = 0$) aus

$$\underbrace{e^t - 1}_{=H(t)} = \int_0^t e^s ds = \int_0^y \frac{ds}{1+s^2} = \underbrace{\arctan(y)}_{=G(y)},$$

also

$$y = y(t) = \tan\left(e^t - 1\right)$$

(Es gilt dabei $G(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$, also ist $H(t) \in G(\mathbb{R})$ für $t \in (-\infty, \ln(1+\pi/2))$. Nach S. 18.4 ist y Lösung auf $(-\infty, \ln(1+\pi/2))$, und dieses Intervall ist offenbar maximal. Man sieht, dass die Lösung i.A. nur auf einem echten Teilintervall von I $(=\mathbb{R})$ existiert.

Eine weitere Klasse von Differenzialgleichungen, bei denen man die Lösungen i. W. mittels Integration bestimmen kann, sind (skalare) lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung:
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sind $a : I \to \mathbb{K}$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so heißt

$$y' = a(t)y + b(t)$$

eine *lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung*. Ist $b = 0$, so spricht man von einer *homogenen Gleichung*. Es gilt dafür

Satz 18.6 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es sei $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Ferner seien $a, b : I \to \mathbb{K}$ stetig. Dann hat das AWP*

$$y' = a(t)y + b(t)\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

hat genau eine Lösung φ auf I, gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{A(t)}\Big[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)ds\Big],$$

wobei $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \,(t \in I)$.

Beweis. Es gilt für $t \in I$

$$\varphi'(t) = e^{A(t)}a(t)\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)ds\right] + \underbrace{e^{A(t)}e^{-A(t)}}_{=1} b(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

und

$$\varphi(t_0) = e^{A(t_0)}y_0 = y_0\,,$$

d.h. φ ist Lösung des AWP auf I.
Ist $(\tilde\varphi, I)$ eine weitere Lösung, so betrachten wir

$$\psi(t) := (\varphi(t) - \tilde\varphi(t))e^{-A(t)}\,.$$

Dann gilt

$$\psi'(t) = \underbrace{(\varphi'(t) - \tilde\varphi'(t))}_{=a(t)(\varphi(t)-\tilde\varphi(t))} e^{-A(t)} - (\varphi(t) - \tilde\varphi(t))e^{-A(t)}a(t) \equiv 0\,,$$

also ist $\psi \equiv \psi(t_0) = 0$ auf I und damit (da $e^{-A(t)} \neq 0$) auch $\varphi \equiv \tilde\varphi$ auf I . □

Beispiel 18.7 Wir betrachten noch einmal das AWP aus B. 18.1. Nach S. 18.6 (mit $a(t) \equiv -\alpha$ und $b(t) \equiv \beta$) ist durch

$$\varphi(t) = e^{-\alpha t}\Big[Y_0 + \beta \int_0^t e^{\alpha s} ds\Big] = e^{-\alpha t}\Big[Y_0 + \frac{\beta}{\alpha}\, e^{\alpha s}|_0^t\Big] = \frac{\beta}{\alpha} - e^{-\alpha t}\Big[\frac{\beta}{\alpha} - Y_0\Big] \qquad (t \in \mathbb{R})$$

die (eindeutig bestimmte) Lösung auf $\mathbb{R}$ gegeben (vgl. B. 18.5.1).

Zum Abschluss wollen wir uns noch mit einer Klasse von Differenzialgleichungen beschäftigen, in denen höhere Ableitungen auftreten. Zunächst wieder ein Beispiel aus der Ökonomie.

Beispiel 18.8 Wir betrachten wieder ein dynamisches Modell einer Volkswirtschaft: Das Einkommen Y verändere sich proportional zur Differenz aus Nachfrage D und Einkommen, d.h.

$$Y'(t) = k(D(t) - Y(t)) .$$

Weiter betrachten wir das Zinsniveau r, dessen Veränderung proportional zur Differenz aus Geldnachfrage und Geldangebot ist. Geht man weiter davon aus, dass die Geldnachfrage proportional zu Y und das Geldangebot konstant ($M = \bar{M}$) sind, so erhalten wir

$$r'(t) = m(dY(t) - \bar{M}) .$$

Schließlich ergibt sich – nach dem Modell – die Nachfrage D als Summe von privatem Konstum C, der als proportional zu Y angenommen wird ($C = cY$), und Investitionen I, die ihrerseits als $I = a_0 - ar$ mit positiven Konstanten a, a_0 angesetzt sind. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} Y'(t) & = & -k(1-c)Y(t) + ka_0 - kar(t) \\ r'(t) & = & mdY(t) - m\bar{M} \end{array} .$$

(also ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung). Differenziert man die erste Gleichung und setzt die zweite ein, so folgt

$$Y''(t) = -k(1-c)Y'(t) - kar'(t) = -k(1-c)Y'(t) - kamdY(t) + kam\bar{M} \qquad .$$

Dies ist eine sogenannte Differenzialgleichung 2. Ordnung, in der erste und zweite Ableitungen auftauchen.

Allgemeiner betrachten wir nun Gleichungen n-ter Ordnung:

Definition 18.9 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K})$. Eine Gleichung der Gestalt

$$y^{(n)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big) \tag{18.3}$$

oder kurz

$$y^{(n)} = f\big(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\big)$$

heißt *(gewöhnliche) Differenzialgleichung n-ter Ordnung.*
Eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}$ (bzw. das Paar (φ, I)) heißt *Lösung* von (18.3), falls φ n-mal differenzierbar auf I ist mit $(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ und

$$\varphi^{(n)}(t) = f\big(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\big) \qquad \text{für alle} \quad t \in I .$$

Ist $(t_0, \eta_0, ..., \eta_{n-1}) \in D$, so heißt ein Gleichungssystem der Form

$$y^{(n)} = f\big(t, y, ..., y^{(n-1)}\big), \quad y(t_0) = \eta_0, ..., y^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1} \tag{18.4}$$

ein *Anfangswertproblem* (AWP) für (18.3). Schließlich heißt eine Lösung (φ, I) von (18.3) *Lösung des AWP* (18.4), falls

$$\varphi(t_0) = \eta_0, ..., \varphi^{(n-1)}(t_n) = \eta_{n-1}$$

gilt.

Beispiel 18.10 Das AWP

$$y'' = -y, \qquad y(0) = 1,\, y'(0) = 0$$

hat die Lösung $\varphi(t) = \cos t$ auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung 18.11 Man kann eine DGL n-ter Ordnung stets auf ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung wie aus D. 18.2 umschreiben:
Betrachten wir $F : D \to \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{array}{rcl} F_1(t, y_1, ..., y_n) & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n-1}(t, y_1, ..., y_n) & = & y_n \\ F_n(t, y_1, ..., y_n) & = & f(t, y_1, ..., y_n) \end{array},$$

so sieht man sofort: Ist $\varphi : I \to \mathbb{K}$ eine Lösung von (18.3) (bzw. (18.4)), so ist

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \vdots \\ \Phi_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in I)\,,$$

eine Lösung von

$$y' = F(t, y)$$

(bzw. $y' = F(t, y)$ und $y(t_0) = (\eta_0, ..., \eta_{n-1})^T$). Ist umgekehrt $\Phi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $y' = F(t, y)$ (bzw. $y' = F(t, y)$ und $y(t_0) = (\eta_0, ..., \eta_{n-1})^T$), so ist $\varphi := \Phi_1 : I \to \mathbb{K}$ (also die 1. Komponente von Φ) eine Lösung von (18.3) (bzw. (18.4)), auf I.
Dies zeigt, dass man sich bei einer allgemeinen Lösungstheorie auf Gleichungen 1. Ordnung beschränken kann. Einer solchen allgemeinen Lösungstheorie wenden wir uns als nächstes zu.

19 Lösungstheorie für allgemeine gewöhnliche Differenzialgleichungen

Wir studieren nun allgemeine Anfangswertprobleme wie in (18.2), d.h. für eine gegebene Funktion $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$, wobei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen ist, und für $(t_0, y^0) \in D$ betrachten wir das AWP

$$y' = f(t, y) \qquad y(t_0) = y^0 \,.$$

In 18.3 hatten wir gesehen, dass nicht jedes solche AWP eine eindeutige Lösung besitzt. Im folgenden wollen wir zeigen, dass unter etwas stärkeren Voraussetzungen an f (außer der Stetigkeit) stets genau eine sog. maximale Lösung des AWPs existiert.

Definition 19.1 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f : D \to K^d$. Man sagt, f *genügt auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y*, wenn zu jedem $(t_0, y^0) \in D$ eine Umgebung $U = U(t_0, y^0)$ von (t_0, y^0) und eine Konstante $L = L(U)$ existieren mit

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| < L|y - \tilde{y}| \qquad \text{für alle} \quad (t, y), (t, \tilde{y}) \in U$$

(wobei $|\cdot|$ stets die euklidische Norm ist).

Bemerkung 19.2 1. Genügt f auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y so existiert für alle $K \subset D$, K kompakt, eine Konstante $L = L(K)$ mit

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$$

für alle (t, y) und $(t, \tilde{y}) \in K$.
(Denn: Es sei $K \subset D$ kompakt. Angenommen, es existiert keine Konstante L wie gewünscht. Dann existieren Folgen $(t_n, y^{(n)})$ und $(t_n, \tilde{y}^{(n)})$ in K und eine Folge $L_n \to \infty$ mit

$$|f(t_n, y^{(n)}) - f(t_n, \tilde{y}^{(n)})| > L_n|y^{(n)} - \tilde{y}^{(n)}| \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Da K kompakt ist, besitzt $(t_n, y^{(n)})$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert (t_0, y^0) in K. O. E. können wir annehmen, dass die Folge $(t_n, y^{(n)})$ selbst konvergiert. Aus

$$L_n|y^{(n)} - \tilde{y}^{(n)}| \leq 2 \max_{(t,y)\in K} |f(t, y)| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

folgt, dass auch $(t_n, \tilde{y}^{(n)}) \to (t_0, y^0)$ gilt. Nach Voraussetzung existieren eine Umgebung U von (t_0, y^0) und ein $L > 0$ mit

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \qquad \text{für alle } (t, y), (t, \tilde{y}) \in U\,.$$

Da $(t_n, y^{(n)})$ und $(t_n, \tilde{y}^{(n)})$ für n genügend groß in U liegen, ergibt sich ein Widerspruch.)

2. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, existiert für jedes $(t, y) \in D$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(t,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_d}(t,y) \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial y_1}(t,y) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial y_d}(t,y) \end{pmatrix}$$

und sind sämtliche partiellen Ableitungen $\partial f_j / \partial y_k : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, so genügt f auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y.
(Denn: Wie im Beweis zu Satz 15.13 sieht man, dass $\partial f / \partial y : D \to \mathbb{R}^{d \times d}$ stetig ist (wobei $\mathbb{R}^{d \times d}$ mit der von der Operatornorm herkommenden Metrik versehen ist). Ist $(t_0, y^0) \in D$, so existiert eine Kugel $U := U_\delta(t_0, y^0)$ mit $\bar{U} \subset D$. Da $\bar{U}$ kompakt ist, existiert

$$L := L(U) := \max_{(t,y) \in \bar{U}} \| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \| \; .$$

Wir setzen $V_t := \{y \in \mathbb{R}^d : (t,y) \in U\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und definieren für alle t mit $V_t \neq \emptyset$

$$g_t(y) := f(t,y) \qquad (y \in V_t) \; .$$

Dann ist V_t konvex und es gilt $J g_t = (\partial f / \partial y)(t, \cdot)$ auf V_t.
Sind $(t, y),\ (t, \tilde{y}) \in U$, so existiert nach B. 17.2 ein $\xi \in I(y, \tilde{y}) \subset V_t$ so, dass

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| = |g_t(y) - g_t(\tilde{y})| \le ||J g_t(\xi)|| \cdot |y - \tilde{y}| \le L|y - \tilde{y}| \; .$$

Beispiel 19.3 1. Es sei

$$f(t,y) = e^t(1+y^2) \qquad (t, y \in \mathbb{R})$$

(vgl. B. 18.5.3). Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = e^t 2y \qquad (t, y \in \mathbb{R}) \, .$$

Insbesondere ist $\partial f / \partial y$ stetig auf $\mathbb{R}^2$. Nach B. 19.2.2 genügt f auf $\mathbb{R}^2$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y.
Man beachte jedoch: Für $t_0 \in \mathbb{R}$ fest existiert <u>kein</u> $L > 0$ so, dass

$$|f(t_0, y) - f(t_0, \tilde{y})| = e^{t_0}|y + \tilde{y}||y - \tilde{y}| \le L|y - \tilde{y}|$$

für alle $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ erfüllt ist (f genügt keiner globalen Lipschitz-Bedingung bzgl. y).

2. Es sei

$$f(t,y) := \begin{cases} \sqrt{y}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} , \qquad t \in \mathbb{R}$$

(vgl B. 18.3). Dann gilt für alle t und $y, \tilde{y} > 0$

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| = |\sqrt{y} - \sqrt{\tilde{y}}| = \frac{|y-\tilde{y}|}{\sqrt{y}+\sqrt{\tilde{y}}}\,.$$

Ist $L > 0$ beliebig, so gilt für $y, \tilde{y}$ genügend klein

$$\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{\tilde{y}}} > L\,.$$

Also existieren <u>keine</u> Umgebung U von $(0,0)$ und $L \geq 0$ so, dass

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \leq L|y-\tilde{y}| \qquad \text{für alle} \quad (t,y),(t,\tilde{y}) \in U$$

erfüllt ist. Folglich genügt f auf keiner offenen Menge D mit $D \cap (\mathbb{R} \times \{0\} \neq \emptyset$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y.

Wir zeigen nun, dass das AWP (18.2) äquivalent ist zu einer gewissen Integralgleichung. Um dies für $\mathbb{K}^d$-wertige Funktionen formulieren zu können, setzen wir für $f = (f_1, ..., f_d)^T : [a,b] \to \mathbb{K}^d$, mit $f_j \in R[a,b]$ für $j = 1, ..., d$

$$\int_a^b f(s)ds := \left(\int_a^b f_1(s)ds, ..., \int_a^b f_d(s)ds \right)^T .$$

Dann hat $\int$ die üblichen Eigenschaften skalarer Integrale; einzig nichttrivial ist dabei $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$:
Es gilt für alle $f = (f_1, ..., f_d)^T$ mit $f_j \in R[a,b]$

$$\Big|\int_a^b f(s)ds\Big| \leq \int_a^b |f(s)|ds\,.$$

(Denn: Es sei

$$u := \int_a^b f(s)ds \in \mathbb{K}^d\,.$$

Dann gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
|u|^2 &= \bar{u}^T u = \sum_{j=1}^d \bar{u}_j \int_a^b f_j(s)ds = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^d \bar{u}_j f_j(s) \right) ds \\
&= \int_a^b \bar{u}^T f(s)ds = \operatorname{Re} \int_a^b \bar{u}^T f(s)ds = \int_a^b \operatorname{Re}(\bar{u}^T f(s))ds \\
&\leq \int_a^b |\bar{u}^T f(s)|ds \leq \int_a^b |u|\,|f(s)|ds\,,
\end{aligned}$$

also

$$|u| \leq \int_a^b |f(s)|ds\,.)$$

Satz 19.4 *Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ferner sei $(t_0, y^0) \in D$. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$, so sind für $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$ äquivalent:*

a) (φ, I) ist eine Lösung von (18.2), d.h. $\varphi(t_0) = y^0$ und

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad (t \in I)\,.$$

b) Es ist graph$(\varphi) \subset D$ und für alle $t \in I$ gilt

$$\varphi(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))ds\,.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_d)$, $y^0 = (y_1^0, ..., y_d^0)$. Aus $\varphi_j'(s) = f_j(s, \varphi(s))$ und $\varphi_j(t_0) = y_j^0$ ergibt sich durch Aufintegrieren und Anwendung des HDI, Teil 2, für alle $t \in I$ und $j = 1, ..., d$

$$\varphi_j(t) - y_j^0 = \varphi_j(t) - \varphi_j(t_0) = \int_{t_0}^t \varphi_j'(s)ds = \int_{t_0}^t f_j(s, \varphi(s))ds\,.$$

(Man beachte dabei φ_j' ist stetig auf I, da $s \mapsto f_j(s, \varphi(s))$ stetig ist.)
b) $\Rightarrow$ a): Da φ stetig auf I und f stetig auf D sind, ist $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ stetig auf I. Also ergibt sich a) wieder durch Anwendung des HDI, diesmal Teil 1. $\square$

Damit können wir folgende (zunächst „lokale") Version eines Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Anfangswertprobleme beweisen.

Satz 19.5 *(Picard-Lindelöf; lokale Version)*
Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ferner genüge f auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y. Dann existiert für jedes $K \subset D$, K kompakt, ein $\alpha_0 = \alpha_0(K) > 0$ so, dass das AWP

$$y' = f(t, y)\,, \qquad y(\xi) = \eta$$

für jedes $(\xi, \eta) \in K$ und jedes Intervall $I \subset [\xi - \alpha_0, \xi + \alpha_0]$ mit $\xi \in I$ genau eine Lösung auf I besitzt.

Beweis. Unser Beweis beruht auf einer geeigneten Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes.
1. Wir stellen zunächst einige kleinere Vorüberlegungnen topologischer Art an.
Ist (X,d) ein metrischer Raum, so setzen wir für $A, B \subset X$ (mit $\inf \emptyset = \infty$)

$$\mathrm{dist}(A,B) := \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} .$$

Es gilt dabei ([Ü]):

- $\mathrm{dist}(A,B) = \mathrm{dist}(A,\overline{B})$.
- Ist A abgeschlossen und K kompakt mit $A \cap K = \emptyset$, so ist $\mathrm{dist}(A,K) > 0$.

Es sei nun $K \subset D$ kompakt. Wir wählen eine offene und beschränkte Menge V mit

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset D .$$

(Eine solche existiert: Da K kompakt und D^c abgeschlossen ist, gilt

$$\mathrm{dist}(K, D^c) > 0 .$$

Ist $0 < \gamma < \mathrm{dist}(K, \partial D)$, so ist

$$V := \bigcup_{(\xi,\eta)\in K} U_\gamma((\xi,\eta))$$

offen und beschränkt, und es gilt $\mathrm{dist}(D^c, \overline{V}) = \mathrm{dist}(D^c, V) \geq \mathrm{dist}(D^c, K) - \gamma > 0$, also insbesondere $\overline{V} \subset D$.)
Da auch $\mathrm{dist}(K, V^c) > 0$ ist, existieren $\alpha, \beta > 0$ so, dass für alle $(\xi,\eta) \in K$ gilt

$$R(\xi,\eta) := \{(t,y) : |t-\xi| \leq \alpha,\ |y-\eta| \leq \beta\} \subset V .$$

Wir setzen weiter (beachte: $\overline{V}$ kompakt)

$$M := \max_{(t,y)\in\overline{V}} |f(t,y)|$$

und (mit $L = L(\overline{V})$ wie in B. 19.2.1 und $\varrho/0 := \infty$ für $\varrho > 0$)

$$\alpha_0 := \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{2L}\right) .$$

2. Es sei $(\xi,\eta) \in K$ fest, und es sei I ein Intervall mit $\xi \in I$ und

$$I \subset [\xi - \alpha_0, \xi + \alpha_0] .$$

Wir setzen

$$A := \{\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d) : |\varphi(t) - \eta| \leq \beta \text{ für alle } t \in I\} .$$

Nach B. 11.9 ist $(B(I,\mathbb{K}^d),d)$ mit

$$d(f,g) :=\parallel f-g \parallel_\infty$$

ein vollständiger metrischer Raum. Weiter ist $A\subset B(I,\mathbb{K}^d)$ abgeschlossen.
(Denn: Es sei $(\varphi_n)_n$ eine Folge in A mit $\varphi_n\to\varphi$ für ein $\varphi\in B(I,\mathbb{K}^d)$. Dann ist nach S. 11.10 φ stetig auf I, d.h. $\varphi\in C(I,\mathbb{K}^d)$. Außerdem gilt für alle $t\in I$, $n\in\mathbb{N}$

$$|\varphi(t)-\eta| \le \underbrace{|\varphi_n(t)-\eta|}_{\le\beta} + \underbrace{|\varphi_n(t)-\varphi(t)|}_{\to 0 \quad (n\to\infty)},$$

also auch $|\varphi(t)-\eta|\le\beta$ und damit $\varphi\in A$. Nach S. 9.15 ist A abgeschlossen.)
Als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $(B(I,\mathbb{K}^d),d)$ ist (A,d) ebenfalls vollständig ([Ü]).
3. Wir definieren für $\varphi\in A$

$$T\varphi(t) := \eta + \int_\xi^t f(s,\varphi(s))ds \qquad (t\in I)\,.$$

(Man beachte: aus $\varphi\in A$ folgt $(s,\varphi(s))\in R(\xi,\eta)\subset V\subset D$ für alle $s\in I$).
Da $s\mapsto f(s,\varphi(s))$ stetig auf I ist, ist auch $T\varphi$ stetig auf I nach dem HDI (sogar differenzierbar). Weiter gilt für $t\in I$

$$\begin{aligned}|T\varphi(t)-\eta| &= \Big|\int_\xi^t f(s,\varphi(s))ds\Big| \le \Big|\int_\xi^t \underbrace{|f(s,\varphi(s))|}_{\le M}ds\Big| \\ &\le M\cdot|t-\xi| \le M\cdot\alpha_0 \le \beta\,,\end{aligned}$$

also ist $T\varphi\in A$. Damit gilt $T: A\to A$.
4. Behauptung: $T: A\to A$ ist eine 1/2-Kontraktion.
Denn: Für $\varphi,\tilde\varphi\in A$ und $t\in I$ gilt

$$\begin{aligned}|T\varphi(t)-T\tilde\varphi(t)| &\le \Big|\int_\xi^t |f(s,\varphi(s))-f(s,\tilde\varphi(s))|ds\Big| \le \\ &\le L\Big|\int_\xi^t |\varphi(s)-\tilde\varphi(s)|ds\Big| \le L \parallel \varphi-\tilde\varphi \parallel_\infty |t-\xi| \\ &\le L \parallel \varphi-\tilde\varphi \parallel_\infty \cdot\alpha_0 \le \frac{1}{2} \parallel \varphi-\tilde\varphi \parallel_\infty\,.\end{aligned}$$

5. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat T genau einen Fixpunkt $\varphi\in A$, d.h. es existiert genau eine Funktion $\varphi\in A$ mit

$$\varphi(t) = \eta + \int_\xi^t f(s,\varphi(s))ds \qquad (t\in I)\,. \tag{19.5}$$

Da jede Funktion $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$, die (19.5) erfüllt, notwendigerweise in A liegt, ist φ nach S. 19.4 die eindeutig bestimmte Lösung des AWPs $y' = f(t, y)$, $y(\xi) = \eta$ auf I.
$\square$

Bemerkung 19.6 1. Man kann zeigen, dass auch ohne die Voraussetzung einer lokalen Lipschitz-Bedingung die Existenz einer Lösung des AWP (18.2) auf einer Umgebung eines jeden Anfangswertepaares $(t_0, y^0) \in D$ gesichert ist. (Existenzsatz von Peano). Wie etwa B. 18.3 zeigt, sind die Lösungen in diesem Fall allerdings nicht mehr eindeutig.
Auf den Beweis des Satzes von Peano, der weitergehende Hilfsmittel der Analysis erfordert, wollen wir nicht eingehen.

2. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu S. 19.5 ergibt sich mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgendes iterative Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Lösung des AWP (18.2) auf einer Umgebung von t_0:
Ist $\varphi_0 \in A$ (etwa $\varphi_0(t) \equiv y^0$), so konvergiert die Folge (φ_n) in A mit

$$\varphi_{n+1}(t) := T\varphi_n(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))ds$$

für $|t - t_0|$ genügend klein gegen die Lösung φ. Außerdem ergibt sich aus dem Banachschen Fixpunktsatz eine Abschätzung für den Fehler $\| \varphi - \varphi_n \|_\infty$.
Dieses Näherungsverfahren zur Bestimmung der Lösung heißt „Picard-Lindelöfsches Iterationsverfahren“ oder auch „Methode der sukzessiven Approximationen“. Für das einfache Beispiel $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$ erhalten wir etwa mit $\varphi_0 \equiv 1$

$$\varphi_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\lambda^\nu t^\nu}{\nu!},$$

also $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{\lambda t}$ (hier sogar für alle $t \in \mathbb{R}$).

Definition 19.7 1. Es seien (φ, I) und $(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$ Lösungen des AWP (18.2). Dann heißt $(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$ (*echte*) *Fortsetzung* von (φ, I), falls $\tilde{I} \supset I$ ($\tilde{I} \neq I$) und $\tilde{\varphi}_{|I} = \varphi$ gilt.
2. Eine Lösung (φ_0, I_0) von (18.2) heißt *maximal*, falls (φ_0, I_0) Fortsetzung jeder Lösung (φ, I) von (18.2) ist. Das Intervall I_0 heißt dann *maximales Existenzintervall* der Lösung des AWP. (Man beachte: (φ_0, I_0) ist eindeutig.)

Es gilt damit

Satz 19.8 *(Picard-Lindelöf, globale Version)*
Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ferner genüge f auf D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y. Dann existiert zu jedem $(t_0, y^0) \in D$ (genau) eine maximale Lösung (φ_0, I_0) des AWPs (18.2). Weiter gilt: I_0 ist offen, und die maximale Lösung „verlässt jede kompakte Teilmenge von D“, d.h., zu jedem $K \subset D$, K kompakt, existieren $T_1, T_2 \in I_0$, $T_1 < T_2$ mit

$$(t, \varphi_0(t)) \notin K$$

für alle $t < T_1$ und $t > T_2$.

Beweis.
1. Wir zeigen zunächst: Sind (φ_1, I_1) und (φ_2, I_2) Lösungen des AWPs (18.2), so gilt

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \qquad (t \in I_1 \cap I_2)\,.$$

Denn: Angenommen, es existiert ein $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$ mit $\varphi_1(\bar{t}) \neq \varphi_2(\bar{t})$. O.E. betrachten wir den Fall $\bar{t} > t_0$. Dann setzen wir

$$\bar{s} := \inf\{t \in I_1 \cap I_2 : t > t_0,\ \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}\,.$$

Nach S. 19.5 ist $t_0 < \bar{s} (\leq \bar{t})$ und nach Definition gilt

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in [t_0, \bar{s})\,.$$

Da φ_1 und φ_2 stetig auf $[t_0, \bar{s}] \subset I_1 \cap I_2$ sind, gilt auch

$$\varphi_1(\bar{s}) = \varphi_2(\bar{s})\,.$$

Damit ist $\bar{s}$ kein Randpunkt von $I_1 \cap I_2$ und φ_1 und φ_2 sind Lösungen von $y' = f(t, y)$, $y(\bar{s}) = \varphi_1(\bar{s}) (= \varphi_2(\bar{s}))$ auf einer Umgebung von $\bar{s}$. Nach S. 19.5 muss dann aber $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ auf einer Umgebung von $\bar{s}$ gelten, im Widerspruch zur Definition von $\bar{s}$.
2. Es sei I_0 die Vereinigung aller Intervalle I mit $t_0 \in I$ und so, dass auf I eine Lösung $\varphi = \varphi_I$ existiert (solche Intervalle existieren nach S. 19.5). Für $t \in I_0$ setzen wir

$$\varphi_0(t) := \varphi_I(t) \qquad \text{falls} \quad t \in I\,.$$

Dann ist φ_0 nach 1. wohldefiniert, denn sind $\varphi = \varphi_I$ und $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{\tilde{I}}$ zwei Lösungen mit $t \in I \cap \tilde{I}$, so gilt $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$.
Außerdem ergibt sich aus der Definition, dass (φ_0, I_0) maximale Lösung von (18.2) ist.
3. Es sei $K \subset D$ kompakt. Angenommen, es existiert kein T_2 wie gefordert. Ist $b \in (t_0, \infty]$ der rechte Randpunkt von I_0, so existiert damit eine Folge (t_n) in I_0 mit $t_n \uparrow b$

$$(t_n, \varphi_0(t_n)) \in K \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Dann ist insbesondere $b < \infty$.
Es sei nun $\alpha_0 = \alpha_0(K)$ wie in S. 19.5. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $t_N > b - \alpha_0$. Nach S. 19.5 hat das AWP

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_N) = \varphi_0(t_N)$$

eine Lösung $\tilde{\varphi}$ auf $[t_N - \alpha_0, t_N + \alpha_0]$. Dann ist durch

$$\bar{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi_0(t)\,, & t \in [t_0, t_N] \\ \tilde{\varphi}(t)\,, & t \in (t_N, t_N + \alpha_0] \end{cases}$$

eine Lösung von (18.2) auf $[t_0, t_N + \alpha_0]$ gegeben (wichtig dabei: $\bar{\varphi}'(t_N) = f(b, \varphi_0(t_N))$, auch „rechtsseitig"). Da $t_N + \alpha_0 > b$ ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Maximalität von I_0.
Damit ist insbesondere auch $b \notin I_0$, denn sonst wäre $[t_0, b] \times \varphi_0([t_0, b])(\subset D)$ kompakt als Bild der stetigen Funktion $t \mapsto (t, \varphi_0(t))$ unter der kompakten Menge $[t_0, b]$. Dies widerspricht aber dem eben bewiesenen.
Eine entsprechende Argumentation für den linken Randpunkt a von I_0 zeigt die Existenz eines T_1 wie gefordert und damit insbesondere auch $a \notin I_0$. □

Bemerkung 19.9 Unter den Voraussetzungen von S. 19.8 existiert also zu jedem Punkt $(t_0, y^0) \in D$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung (φ_0, I_0). Wir schreiben statt φ_0 auch $\varphi(\cdot, t_0, y^0)$ und statt I_0 auch $I_{(t_0, y^0)}$. Die dadurch definierte Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}^d$ mit

$$\Omega := \bigcup_{(t_0, y^0) \in D} \{(t, t_0, y^0) : t \in I(t_0, y^0)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$$

betrachten wir als die „allgemeine Lösung" der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$.

Beispiel 19.10 1. Es sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Für festes $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das AWP

$$y' = \lambda y\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

für $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die maximale Lösung

$$\varphi_0(t) = \varphi(t, t_0, y_0) = y_0 e^{\lambda(t - t_0)} \quad \text{auf } I_0 = I_{(t_0, y_0)} = \mathbb{R}\,.$$

2. Es sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir betrachten das AWP

$$y' = y^2\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

für $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nach S. 18.4 ergibt sich die Lösung (jedenfalls lokal) für $y_0 \neq 0$ durch Auflösen von

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} ds = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0}\,,$$

also

$$y = y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0(t-t_0)} \qquad \text{für } |t-t_0| \text{ klein}.$$

Man sieht (durch Differenzieren), dass dabei gilt

$$\varphi(t, t_0, y_0) = \frac{y_0}{1 - y_0(t-t_0)} \quad \text{für} \begin{cases} t > t_0 + 1/y_0\,, & \text{falls } y_0 < 0 \\ t \in \mathbb{R}\,, & \text{falls } y_0 = 0 \\ t < t_0 + 1/y_0\,, & \text{falls } y_0 > 0 \end{cases},$$

also

$$I_{(t_0,y_0)} = \begin{cases} (t_0 + 1/y_0, \infty)\,, & \text{falls } y_0 < 0 \\ (-\infty, \infty)\,, & \text{falls } y_0 = 0 \\ (-\infty, t_0 + 1/y_0) & \text{falls } y_0 > 0 \end{cases}.$$

Obwohl $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist, sind die maximalen Lösungsintervalle dabei i.A. nicht ganz $\mathbb{R}$; die Lösungen haben eine „endliche Entweichzeit“.
Man beachte auch: Alle Lösungen verlassen jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, sowohl, wenn t sich dem rechten Randpunkt, als auch, wenn t sich dem linken Randpunkt von $I_{(t_0,y_0)}$ annähert. Genauer gilt hier

$$\varphi(t, t_0, y_0) \to \begin{cases} -\infty & \text{für } t \to (t_0 + 1/y_0)^+\,, & \text{falls } y_0 < 0 \\ \infty & \text{für } t \to (t_0 + 1/y_0)^-\,, & \text{falls } y_0 > 0 \end{cases}.$$

Komplizierter ist das Randverhalten bei folgendem (ersten höherdimensionalen) Beispiel.
3. Es sei $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ und

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = f(t, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -y_2/t^2 \\ y_1/t^2 \end{pmatrix}, \qquad y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\varphi\left(t, \frac{1}{\pi}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) \end{pmatrix} \qquad (t \in (0, \infty))$$

die maximale Lösung des AWP. Hier existiert $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t)$ nicht!

Unter starken Voraussetzungen an f kann man eine Aussage über die Größe der maximalen Lösungsintervalle machen.

Satz 19.11 *Es sei $D = I \times \mathbb{K}^d$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Ferner genüge $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y, und es gelte*

$$|f(t,y)| \le \varrho(t)|y| + \sigma(t) \qquad ((t,y) \in I \times \mathbb{K}^d)$$

mit stetigen Fuktionen $\varrho, \sigma : I \to [0, \infty)$. Dann gilt für alle $(t_0, y^0) \in D$:

$$I_{(t_0,y^0)} = I\,.$$

Beim Beweis verwenden wir das äußerst nützliche sogenannte „Lemma von Gronwall“:

Satz 19.12 *Es sei* $\psi \in C([0,T))$ *für ein* $T > 0$*, und es gelte*

$$\psi(t) \leq A + B \int_0^t \psi(s)ds \qquad (t \in [0,T))$$

für gewisse Konstanten $A \in \mathbb{R}$ *und* $B > 0$*. Dann ist*

$$\psi(t) \leq Ae^{Bt} \qquad (t \in [0,T)) .$$

Beweis. Es sei $\delta > 0$ und

$$g(t) = g_\delta(t) = (A + \delta)e^{Bt} \qquad (t \in [0,T)) .$$

Dann gilt

$$g(t) = A + \delta + B \int_0^t g(s)ds \qquad (t \in [0,T)) .$$

Wir zeigen: $\psi(t) < g(t)$ auf $[0,T)$. (Da $\delta > 0$ beliebig war, ergibt sich hieraus die Behauptung.)
Für $t = 0$ ist jedenfalls $\psi(0) < g(0)$. Angenommen, es existiert ein $t_0 > 0$ mit $\psi(t_0) \geq g(t_0)$. Für

$$t_1 := \inf\{t > 0,\ \psi(t) \geq g(t)\} \quad (> 0)$$

gilt dann $\psi(t_1) = g(t_1)$ und $\psi(s) \leq g(s)$ für $s \in [0, t_1]$ und deshalb

$$\psi(t_1) \leq A + B \int_0^{t_1} \psi(s)ds < A + \delta + B \int_0^{t_1} g(s)ds = g(t_1) .$$

Widerspruch! □

Beweis. (**zu S. 19.11**) Angenommen, $(\alpha, \beta) := I_{(t_0,y^0)} \neq I =: (a,b)$. O.E. sei dann $\beta < b$. Wir setzen

$$R := \max_{t \in [0,\beta]} \varrho(t), \qquad S := \int_{t_0}^{\beta} \sigma(t)dt .$$

Dann gilt für $t_0 \leq t < \beta$

$$\varphi_0(t) = \varphi(t, t_0, y^0) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))ds$$

und damit

$$\begin{aligned} |\varphi_0(t)| &\leq |y^0| + \int\limits_{t_0}^{t} \varrho(s)|\varphi_0(s)|ds + \int\limits_{t_0}^{t} \sigma(s)ds \\ &\leq |y^0| + S + R\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_0(s)|ds \qquad (t \in [t_0, \beta))\,. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Gronwall (angewandt auf $\psi(t) := |\varphi_0(t + t_0)|$) gilt

$$\begin{aligned} |\varphi_0(t)| &\leq (|y^0| + S)e^{R(t-t_0)} \\ &\leq (|y^0| + S)e^{R(\beta-t_0)} \qquad (t \in [t_0, \beta))\,, \end{aligned}$$

also ist φ_0 beschränkt auf $[t_0, \beta)$. Das widerspricht aber der Tatsache, dass φ_0 nach S. 19.8 für $t \to \beta^-$ jede kompakte Teilmenge von $D = I \times \mathbb{R}^d$ verlässt. $\square$

20 Allgemeine lineare Differenzialgleichungen

Bereits in Abschnitt 18 hatten wir uns kurz mit (skalaren) linearen Differenzialgleichungen beschäftigt. Wir untersuchen jetzt den wesentlich allgemeineren Fall von Systemen linearer Differenzialgleichungen.
Es seien im Folgenden stets $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$A = (a_{jk}) : I \to \mathbb{K}^{d\times d}$$

sowie

$$b : I \to \mathbb{K}^d$$

stetig. Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{20.1}$$

nennen wir ein *lineares System* (von Differenzialgleichungen) oder kurz *lineare Differenzialgleichung*. Die Gleichung

$$y' = A(t)y \tag{20.2}$$

heißt *zugehörige homogene Gleichung*. Ist $b = 0$, so heißt (20.1) *homogen*. Meist betrachten wir auch jetzt wieder zugehörige AWPe der Form

$$y' = A(t)y + b(t)\,, \qquad y(\xi) = \eta \tag{20.3}$$

für $\xi \in I, \eta \in \mathbb{K}^d$.
Aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes erhalten wir unmittelbar

Satz 20.1 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{d\times d}, b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig. Dann hat für jedes $(\xi, \eta) \in I \times \mathbb{K}^d$ das AWP (20.3), genau eine maximale Lösung $\varphi(\cdot, \xi, \eta)$ mit $I_{(\xi,\eta)} = I$.*

Beweis. Wir betrachten $f : I \times \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d$

$$f(t, y) := A(t)y + b(t) \qquad (t \in I, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Dann ist f stetig (warum ?), und es gilt

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| = |A(t)(y - \tilde{y})| \le ||A(t)||\,|y - \tilde{y}| \qquad (t \in I, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Ist $I_0 \subset I$ kompakt, so existiert

$$L := \max_{t\in I_0} ||A(t)||\,.$$

Also gilt

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \qquad (t \in I_0, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Insbesondere impliziert dies, dass f auf $I \times \mathbb{K}^d$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y genügt. Ferner gilt

$$|f(t,y)| \leq ||A(t)||\,|y| + |b(t)| \qquad (t \in I, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Aus S. 19.11 (angewandt mit $\rho(t) = ||A(t)||$ und $\sigma(t) = |b(t)|$) ergibt sich die Behauptung. □

Wir wollen uns nun die Struktur der Lösungsgesamtheit von (20.1) genauer anschauen. Dazu betonen wir die Abhängigkeit von der Inhomogenität b und schreiben $\varphi_b(\cdot,\xi,\eta)$ für die maximale Lösung von (20.3). Außerdem setzen wir

$$L_b := \{\psi : \psi \,\text{löst (20.1) auf}\, I\}\,,$$

also insbesondere

$$L_0 = \{\psi : \psi \,\text{löst (20.2) auf}\, I\}\,.$$

Dann gilt für $\xi \in I$ fest (beachte $\psi = \varphi_b(\cdot,\xi,\psi(\xi))$ für alle $\psi \in L_b$)

$$L_b = \{\varphi_b(\cdot,\xi,\eta) : \eta \in \mathbb{K}^d\}$$

und insbesondere

$$L_0 := \{\varphi_0(\cdot,\xi,\eta) : \eta \in \mathbb{K}^d\}\,.$$

Weiter erhalten wir

Satz 20.2 *1. L_0 ist ein d-dimensionaler Unterraum von $C(I,\mathbb{K}^d)$, und für jedes $\xi \in I$ ist die Abbildung $\eta \mapsto \varphi_0(\cdot,\xi,\eta)$ von $\mathbb{K}^d$ auf L_0 ein Isomorphismus (linear und bijektiv).*

2. Weiter gilt: Ist $\psi_b \in L_b$ fest, so gilt

$$L_b = \psi_b + L_0 \; (:= \{\psi_b + \psi_0 : \psi_0 \in L_0\})\,,$$

d.h. L_b ist ein (d-dimensionaler) affiner Unterraum von $C(I,\mathbb{K}^d)$.

Beweis. 1. Wir zeigen: Die Abbildung $T = T_\xi : \mathbb{K}^d \to C(I,\mathbb{K}^d)$ mit

$$T(\eta) = \varphi_0(\cdot,\xi,\eta) \qquad (\eta \in \mathbb{K}^d)$$

ist linear und injektiv. (Hieraus folgt, dass T ein Isomorphismus auf $L_0 = \text{Bild}(T)$ und damit L_0 ein d-dimensionaler Unterraum von $C(I, \mathbb{K}^d)$ ist.)
Es gilt für $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{K}^d$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit $\psi_1 := \varphi_0(\cdot, \xi, \eta_1)$ und $\psi_2 := \varphi_0(\cdot, \xi, \eta_2)$

$$\begin{aligned}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)'(t) &= \lambda_1\psi_1'(t) + \lambda_2\psi_2'(t) = \\ &= \lambda_1 A(t)\psi_1(t) + \lambda_2 A(t)\psi_2(t) = \\ &= A(t)[\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2](t)\end{aligned}$$

für alle $t \in I$, sowie

$$(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(\xi) = \lambda_1\varphi_0(\xi, \xi, \eta_1) + \lambda_2\varphi_0(\xi, \xi, \eta_2) = \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2\,.$$

Also ist (Eindeutigkeit der Lösung von (20.3))

$$\lambda_1\varphi_0(\cdot, \xi, \eta_1) + \lambda_2\varphi_0(\cdot, \xi, \eta_2) = \varphi_0(\cdot, \xi, \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2)\,,$$

mit anderen Worten

$$\lambda_1 T(\eta_1) + \lambda_2 T(\eta_2) = T(\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2)\,.$$

Folglich ist T linear.
Ist $T(\eta) = 0$, so gilt

$$\eta = \varphi_0(\xi, \xi, \eta) = 0$$

also ist $\text{Kern}(T) = \{0\}$. Damit ist T injektiv.
2. „ $\supset$ “ Es sei $\psi \in \psi_b + L_0$, d.h. $\psi = \psi_b + \psi_0$ für ein $\psi_0 \in L_b$. Dann gilt

$$\psi'(t) = A(t)\psi_b'(t) + b(t) + A(t)\psi_0(t) = A(t)\psi(t) + b(t)$$

auf I, d.h. ψ löst (20.1). Damit ist $\psi \in L_b$.
„ $\subset$ “ Es sei $\psi \in L_b$, d.h. $\psi' = A(t)\psi + b(t)$ auf I. Dann gilt $(\psi - \psi_b)' = A(t)(\psi - \psi_b)$, d.h. $\psi - \psi_b \in L_0$. Also ist $\psi = \psi_b + (\psi - \psi_b) \in \varphi + L_0$. □

Bemerkung und Definition 20.3 Da nach S. 20.2 der Lösungsraum L_0 der homogenen Gleichung $y' = A(t)y$ ein d-dimensionaler linearer Raum ist, reicht es, zur Bestimmung einer beliebigen Lösung eine Basis von L_0 zu kennen (jede Lösung ist dann Linearkombination der Basiselemente). Eine solche Basis heißt *Fundamentalsystem.*
Außerdem zeigt der zweite Teil des Satzes, dass sich die Bestimmung einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems $y' = A(t)y + b(t)$ auf die Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und einer Basis des Lösungsraumes L_0 der zugehörigen inhomogenen Gleichung reduziert.

Wir werden uns zunächst mit homogenen Gleichungen befassen. Der erste Satz zeigt, dass die lineare Unabhängigkeit von Lösungen äquivalent ist zur linearen Unabhängigkeit der Anfangswerte.

Satz 20.4 *Es seien $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(m)} \in L_0$, also Lösungen des homogenen Systems $y' = A(t)y$. Dann sind äquivalent:*

a) $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(m)}$ sind linear unabhängig.

b) Für alle $\xi \in I$ sind $\psi^{(1)}(\xi), ..., \psi^{(m)}(\xi)$ linear unabhängig.

c) Es existiert ein $t_0 \in I$ so, dass $\psi^{(1)}(t_0), ..., \psi^{(m)}(t_0)$ linear unabhängig sind.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\xi \in I$ gegeben. Ist $T = T_\xi$ wie im Beweis zu S. 20.2, so sind $\psi^{(1)} = T(\psi^{(1)}(\xi)), ..., \psi^{(m)} = T(\psi^{(m)}(\xi))$ linear unabhängig. Da T linear ist, sind dann auch $\psi^{(1)}(\xi), ..., \psi^{(m)}(\xi)$ linear unabhängig.
b) $\Rightarrow$ c) ist klar.
c) $\Rightarrow$ a): Ist $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi^{(j)} = 0$, so ist insbesondere auch $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi^{(j)}(t_0) = 0$. Also folgt $\lambda_1 = \ldots \lambda_m = 0$. $\square$

Beispiel 20.5 (vgl. B. 19.10.3) Wir betrachten $I = (0, \infty)$ und

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1/t^2 \\ 1/t^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in (0, \infty)) .$$

Dann ist nach B. 19.10.3

$$\psi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ \cos(1/t) \end{pmatrix} \qquad (t \in (0, \infty))$$

eine Lösung des homogenen Systems

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/t^2 \\ 1/t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A(t)\, y$$

(genauer gilt $\psi^{(1)}(t) = \varphi_0(t, 1/\pi, \binom{0}{-1})$ für $t > 0$). Man rechnet leicht nach, dass auch

$$\psi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(1/t) \\ \sin(1/t) \end{pmatrix} \qquad (t > 0)$$

eine Lösung von $y' = A(t)y$ ist (genauer $\psi^{(2)}(t) = \varphi_0(t, 1/\pi, \binom{1}{0})$).

Da $\psi^{(1)}(1/\pi) = \binom{0}{-1}$ und $\psi^{(2)}(1/\pi) = \binom{1}{0}$ in $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind, sind auch $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ linear unabhängig, also eine Basis des Lösungsraumes L_0. Folglich ist jede Lösung von $y' = A(t)y$ von der Form

$$\psi = \lambda_1 \psi^{(1)} + \lambda_2 \psi^{(2)}$$

für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 20.6 1. Sind $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$ beliebige Lösungen von $y' = A(t)y$ auf I, so bezeichnet man für $t \in I$ die Determinante

$$W(t) := W(\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}; t) := \det \Phi(t) ,$$

wobei

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)}(t) & \dots & \psi_1^{(d)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_d^{(1)}(t) & \dots & \psi_d^{(d)}(t) \end{pmatrix} ,$$

als *Wronski-Determinante* von $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$ (an der Stelle t). Es gilt nach S. 20.4: $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$ ist ein Fundamentalsystem (also eine Basis des Lösungsraumes) genau dann, wenn $W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$ ist. Außerdem ist in diesem Falle schon $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$! (Also: Entweder ist $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ oder $W(t) \equiv 0$ auf I.)
2. Bilden $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$ ein Fundamentalsystem, so heißt die Funktion $\Phi : I \to \mathbb{K}^{d \times d}$ eine *Fundamentalmatrix*. Nach 1. ist $\Phi(\xi)$ für alle $\xi \in I$ invertierbar (da $\det \Phi(\xi) \neq 0$). Es gilt damit

$$\varphi_0(t, \xi, \eta) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(\xi) \cdot \eta \qquad (t \in I) \tag{20.4}$$

d.h. die allgemeine Lösung ergibt sich als Produkt der matrixwertigen Funktion Φ mit dem Vektor $\Phi^{-1}(\xi)\eta$.
(Denn: Für jedes (ξ, η) ist

$$\psi = \Phi\Phi^{-1}(\xi) \cdot \eta$$

eine Linearkombination der Funktionen $\psi^{(1)}, ..., \psi^{(d)}$, also eine Lösung von $y' = A(t)y$. Außerdem gilt

$$\psi(\xi) = \Phi(\xi)\Phi^{-1}(\xi)\eta = \eta ,$$

d. h. auch die Anfangsbedingung ist erfüllt. Folglich ist $\psi = \varphi_0(\cdot, \xi, \eta)$.)

Beispiel 20.7 Es sei A wie in B. 20.5. Dann ist

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin(1/\cdot) & -\cos(1/\cdot) \\ \cos(1/\cdot) & \sin(1/\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} \\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix. Speziell gilt

$$\Phi\Big(\frac{1}{\pi}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\pi}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Lösung von $y' = A(t)y$, $y(1/\pi) = \eta$ gegeben durch

$$\varphi_0\Big(t, \frac{1}{\pi}, \eta\Big) = \Phi(t)\begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} -\eta_2 \sin(1/t) - \eta_1 \cos(1/t) \\ -\eta_2 \cos(1/t) + \eta_1 \sin(1/t) \end{pmatrix}.$$

Wir kommen nun zurück zum inhomogenen System (20.1). Es gilt hierfür

Satz 20.8 *(Variation der Konstanten)*
Es sei $\Phi(\cdot)$ eine Fundamentalmatrix von (20.2). Dann gilt für $\xi \in I$: Die Funktion

$$t \mapsto \Phi(t) \int_{\xi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds$$

ist eine spezielle Lösung von (20.1), nämlich $\varphi_b(t, \xi, 0)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_b(t,\xi,\eta) &= \Phi(t)\Big[\Phi^{-1}(\xi)\eta + \int_{\xi}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds\Big] \qquad (t \in I) \qquad (20.5) \\ (&= \varphi_0(t,\xi,\eta) + \varphi_b(t,\xi,0)\,). \end{aligned}$$

Beweis. Wir schreiben für eine Funktion $C : I \to \mathbb{K}^{d\times d}$ mit $C = (c_{jk})_{j=1,\dots,d}$ und differenzierbaren Funktionen $c_{jk} : I \to \mathbb{K}$ kurz

$$C'(t) := \begin{pmatrix} c'_{11}(t) & \dots & c'_{1d}(t) \\ \vdots & & \\ c'_{d1}(t) & \dots & c'_{dd}(t) \end{pmatrix} \qquad (t \in I).$$

Dann gilt folgende Produktregel für differenzierbares $g : I \to \mathbb{K}^d$

$$(Cg)'(t) = C'(t)g(t) + C(t)g'(t) \qquad (t \in I).$$

(Denn: für $t \in I$ ist

$$(Cg)'_j(t) = \Big(\sum_{k=1}^{d} c_{jk}(t)g_k(t)\Big)' = \sum_{k=1}^{d} c'_{jk}(t)g_k(t) + \sum_{k=1}^{d} c_{jk}(t)g'_k(t) = (C'g)_j(t) + (Cg')_j(t)\Big).$$

Folglich gilt auf I (HDI komponentenweise angewandt)

$$\begin{aligned}\Big(\Phi(t)\int_\xi^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\Big)' &= \Phi'(t)\int_\xi^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t)\\ &\overset{[\ddot{U}]}{=} A(t)\Phi(t)\int_\xi^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + b(t)\end{aligned}$$

d.h. $t \mapsto \Phi(t)\int_\xi^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds$ ist Lösung von (20.1) mit Funktionswert 0 an $t=\xi$. Nach S. 20.2 ist $L_b = \varphi_b(\cdot,\xi,0) + L_0$, und nach (20.4) ist $L_0 = \{\Phi(\cdot)\Phi^{-1}(\xi)\eta : \eta \in \mathbb{K}^d\}$. Da

$$\Phi(\xi)\Big[\Phi^{-1}(\xi)\eta + \int_\xi^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\Big] = \eta$$

gilt, folgt die Behauptung. □

Beispiel 20.9 Wir betrachten wieder A aus B. 20.7. Ferner sei

$$b(t) = \begin{pmatrix}1/t^2\\0\end{pmatrix} \qquad (t>0)\,.$$

Dann ist für $\xi = 1/\pi$ mit Φ aus B. 20.7 nach S. 20.8

$$\varphi_b\Big(t,\frac{1}{\pi},0\Big) = \Phi(t)\int_{1/\pi}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\,.$$

Weiter gilt

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix}\sin(1/t) & \cos(1/t)\\ -\cos(1/t) & \sin(1/t)\end{pmatrix},$$

also

$$\int_{1/\pi}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds = \int_{1/\pi}^t \begin{pmatrix}\sin(1/s)/s^2\\ -\cos(1/s)/s^2\end{pmatrix}ds \overset{1/s=u}{=} \begin{pmatrix}\cos(1/t)+1\\ \sin(1/t)\end{pmatrix}$$

und damit ist

$$\Phi(t)\int_{1/\pi}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds = \begin{pmatrix}\sin(1/t) & -\cos(1/t)\\ \cos(1/t) & \sin(1/t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(1/t)+1\\ \sin(1/t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(1/t)\\ 1+\cos(1/t)\end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Insgesamt ist nach S. 20.8

$$\varphi_b\Big(t,\frac{1}{\pi},\eta\Big) = \varphi_0\Big(t,\frac{1}{\pi},\eta\Big) + \begin{pmatrix}\sin(1/t)\\ 1+\cos(1/t)\end{pmatrix}$$

mit $\varphi_0(\cdot,1/\pi,\eta)$ wie in B. 20.7.

Wir wollen nun die obigen Ergebnisse auf lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung anwenden: Sind $a_0, a_1, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so heißt eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y + b(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t)y^{(\nu)} + b(t) \tag{20.6}$$

eine *lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung*. Die Gleichung

$$y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t)y^{(\nu)} \tag{20.7}$$

heißt *zugehörige homogene* Gleichung. Entsprechende Anfangswertprobleme sind von der Form

$$y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t)y^{(\nu)} + b(t), \qquad y^{(\nu)}(\xi) = \eta_\nu \quad (\nu = 0, ..., n-1) \tag{20.8}$$

mit $\xi \in I, \eta_0, ..., \eta_{n-1} \in \mathbb{K}$.
In B. 18.11 haten wir gesehen, dass man solche Gleichungen bzw. Anfangswertprobleme in Systeme 1. Ordnung umschreiben kann. Hier lautet das entsprechende System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \tag{20.9}$$

also ein lineares System. Nach B. 18.11 lassen sich sämliche Ergebnisse über Lösungen dieses Systems in Ergebnisse über die Lösungen von (20.6) übertragen.
Insbesondere erhalten wir aus S. 20.1

Satz 20.10 *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sind $a_0, ..., a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so hat für jedes $(\xi, \eta) \in I \times \mathbb{K}^n$ das AWP (20.8) (mit $\eta = (\eta_0, ..., \eta_{n-1})$) genau eine Lösung $v =: u_b(\cdot; \xi; \eta_0, ..., \eta_{n-1}) =: u_b(\cdot; \xi; \eta)$ auf I.*

Um eine S. 20.2 und S. 20.8 entsprechende Aussage über die Lösungsgesamtheit machen zu können, unterscheiden wir auch wieder

$$M_0 := \{v : v \text{ löst } (20.7) \text{ auf } I\} \quad \text{und} \quad M_b := \{v : v \text{ löst } (20.6) \text{ auf } I\}.$$

Die wesentlichen Ergebnisse sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 20.11 *1. M_0 ist ein n-dimensionaler Unterraum (von $C(I,\mathbb{K})$) und für $\xi \in I$ gilt $M_0 = \{u_0(\cdot;\xi;\eta) : \eta \in \mathbb{K}^n\}$.*

2. Für jedes $v \in M_b$ ist $M_b = v + M_0$.

3. Sind $v_1, ..., v_n$ Lösungen der homogenen Gleichung (20.7), d.h. $v_1, ..., v_n \in M_0$, so sind $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig (ein „Fundamentalsystem"), genau dann, wenn die „Wronski-Determinante" $W(t) = \det \Phi(t)$, wobei

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) & \dots & \dots & v_n(t) \\ v_1'(t) & \dots & \dots & v_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & \dots & \dots & v_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

für ein $t_0 \in I$ nicht verschwindet. In diesem Fall ist schon $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

4. (Variation der Konstanten) Ist $v_1, ..., v_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung 20.7, so ist für $\xi \in I$

$$t \mapsto \big(v_1(t), ..., v_n(t)\big) \cdot \int_\xi^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds \qquad (t \in I)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung (20.6), nämlich $u_b(t;\xi;0)$. Außerdem gilt für $\eta = (\eta_0, ..., \eta_{n-1})^T \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} u_b(t;\xi;\eta) &= (v_1(t), ..., v_n(t)) \left[\Phi^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix} + \int_\xi^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds \right] \\ (&= u_0(t;\xi;\eta) + u_b(t;\xi;0) \;) \end{aligned} \tag{20.10}$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich alle aus den entsprechenden Ergebnissen für das lineare System (20.9) durch Anwendung der (bijektiven (!) und im Falle $b = 0$ linearen) Abbildung $j = j_b : L_b \to M_b$ mit

$$j(\psi_1, ..., \psi_n) := \psi_1 \qquad ((\psi_1, ..., \psi_n) \in L_b),$$

wobei L_b die Lösungsmenge von (20.9) ist, und deren Umkehrabbildung $j^{-1} : M_b \to L_b$, gegeben durch

$$j^{-1}(v) = (v, v', ..., v^{(n-1)}) \qquad (v \in M_b).$$

Man beachte dabei insbesondere, dass die rechte Seite in (20.10) die erste Komponente von (20.5) für das entsprechende System ist. □

Bemerkung 20.12 Will man (20.10) anwenden, so hat man insbesondere $\Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix}$ zu bestimmen, d.h. man hat das lineare Gleichungssystem

$$\Phi(s)\begin{pmatrix} c_1(s) \\ \vdots \\ c_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix}$$

zu lösen. Auf Grund der speziellen Struktur der rechten Seite ist dies mit Hilfe der Cramerschen Regel relativ einfach durchzuführen. Man erhält hier

$$\begin{aligned} c_j(s) &= \frac{1}{\det \Phi(s)} \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{j-1} & 0 & v_{j+1} & \dots & v_n \\ v_1' & & v_{j-1}' & 0 & v_{j+1}' & & v_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-1)} & \dots & v_{j-1}^{(n-1)} & b(s) & v_{j+1}^{(n-1)} & \dots & v_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(s)}(-1)^{n+j} b(s) W_j(s)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$W_j(s) = \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{j-1} & v_{j+1} & \dots & v_n \\ v_1' & & v_{j-1}' & v_{j+1}' & & v_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(n-2)} & \dots & v_{j-1}^{(n-2)} & v_{j+1}^{(n-2)} & \dots & v_n^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

ist. Also erhalten wir

$$u_b(t;\xi;0) = \sum_{j=1}^{n} v_j(t)(-1)^{n+j} \int_{\xi}^{t} \frac{b(s)W_j(s)}{W(s)} ds \qquad (t \in I)\,.$$

Diese Darstellung erklärt den Namen „Variation der Konstanten“: Während jede Lösung der homogenen Gleichung von der Form $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j(t)$ ist (also Linearkombination der $v_1, ..., v_n$), ist hier

$$u_b(t;\xi;0) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) v_j(t)\,,$$

also Linearkombination der $v_1(t), ..., v_n(t)$ mit bezüglich t variierenden Koeffizienten $\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)$.

Beispiel 20.13 Wir betrachten die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = y + e^t \, .$$

Man rechnet sofort nach, dass

$$v_1(t) = e^t \, , \qquad v_2(t) = e^{-t} \qquad\qquad (t \in \mathbb{R})$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y'' = y$ ist. Also erhalten wir nach B. 20.12 mit

$$\begin{aligned} & b(t) = e^t \, , \\ & W(t) = \det \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} = -2 \\ & W_1(t) = \det(e^{-t}) = e^{-t}, \qquad W_2(t) = \det(e^t) = e^t \end{aligned}$$

die spezielle Lösung

$$u_b(t; 0; 0, 0) = -v_1(t) \int\limits_0^t \frac{b(s) W_1(s)}{W(s)} ds + v_2(t) \int\limits_0^t \frac{b(s) W_2(s)}{W(s)} ds = \frac{t}{2} e^t - \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} \, .$$

Weiter ergibt sich, da

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

mit (20.10)

$$\begin{aligned} u_b(t; 0; \eta_0, \eta_1) &= \big(v_1(t), v_2(t)\big) \Phi^{-1}(0) \binom{\eta_0}{\eta_1} + u_b(t; 0; 0, 0) \\ &= \frac{1}{2} e^t \left(\eta_0 + \eta_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{-t} \left(\eta_0 - \eta_1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{t}{2} e^t \end{aligned}$$

Sucht man speziell die Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, so ergibt sich

$$u_b(t; 0; , 0, 1) = \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{t}{2} e^t \, .$$

Also: Die obigen Ergebnisse zeigen, dass wir zur Lösung linearer Systeme oder linearer Differenzialgleichungen n-ter Ordnung Fundamentalsysteme finden müssen. Leider ist dies ein i A. sehr schwieriges Unterfangen, und es gibt keineswegs eine geschlossene Theorie. Wir werden uns im nächsten Abschnitt intensiv mit dem Fall linearer Gleichungen mit konstanten Koeffzienten (d.h. $A(t) \equiv A$ auf $\mathbb{R}$ bzw. $a_j(t) \equiv a_j$ auf $\mathbb{R}$ für

$j = 1, ..., n$) beschäftigen. Zum Abschluss dieses Abschnittes stellen wir noch kurz zwei mögliche Ansätze für allgemeine lineare Gleichungen vor.
Kennt man (woher auch immer) bereits eine nichtverschwindende Lösung einer linearen Differenzialgleichung der Ordnung n, so lässt sich dies nutzen, um weitere Lösungen aus einer linearen Differenzialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung zu bestimmen („Reduktion der Ordnung"). Wir beschränken uns bei der Darstellung dieses Verfahrens auf den Fall $n = 2$.

Satz 20.14 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und es seien $a_0, a_1 : I \to \mathbb{K}$ stetig. Ist (u, I) eine Lösung der Differenzialgleichung*

$$y'' = a_1(t)y' + a_0(t)y$$

mit $u(t) \neq 0$ für alle $t \in J$, wobei $J \subset I$ ein offenes Intervall ist, so erhält man eine zweite, von u linear unabhängige Lösung $v : J \to \mathbb{K}$ durch den Ansatz

$$v(t) = z(t)u(t) \qquad (t \in J),$$

wobei $z' = w \not\equiv 0$ eine Lösung der linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$w' = \Big(a_1(t) - 2\frac{u'(t)}{u(t)}\Big)w$$

ist.

Beweis. Aus $v = zu$ folgt

$$v' = z'u + zu', \qquad v'' = z''u + 2z'u' + u''z,$$

und mit $u'' = a_1u' + a_0u$ erhalten wir, falls $z'' = (a_1 - 2u'/u)z'$ gilt,

$$v'' - a_1v' - a_0v = z''u + 2z'u' + u''z - a_1z'u - a_1zu' - a_0zu = 0,$$

d.h. v ist ebenfalls Lösung (auf J).
Ist $z' \not\equiv 0$, so ist z nicht konstant auf J, und damit sind u und v linear unabhängig. □

Beispiel 20.15 Wir betrachten die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = \frac{2t}{1-t^2}y' - \frac{2}{1-t^2}y$$

auf $I = (-1, 1)$. Man sieht sofort, dass

$$u(t) = t$$

eine Lösung auf $(-1,1)$ ist. Also erhalten wir nach S. 20.14 eine zweite, linear unabhängige Lösung v, etwa auf $(0,1)$ durch

$$v = zu\,,$$

wobei $w = z'$ Lösung von

$$w' = \Big(a_1 - 2\frac{u'}{u}\Big)w = \Big(\frac{2t}{1-t^2} - \frac{2}{t}\Big)w$$

ist. Nach S. 18.6 ist mit

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \frac{2tdt}{1-t^2} - \int \frac{2dt}{t} = \ln\Big(\frac{1}{1-t^2}\Big) - 2\ln(t) \quad [+c] \\ &= \ln\Big(\frac{1}{1-t^2}\Big) + \ln\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \quad [+c] \end{aligned}$$

die Funktion

$$w(t) = e^{A(t)} = \frac{1}{(1-t^2)t^2}$$

Lösung, also

$$z(t) = \int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} = \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\Big)dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big)$$

und damit

$$v(t) = tz(t) = \frac{t}{2}\ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) - 1\,.$$

Folglich bilden (u,v) ein Fundamentalsystem der Ausgangsgleichung (zunächst auf $(0,1)$, aber tatsächlich auch auf $(-1,1)$).

Im manchen Fällen ist es möglich, Lösungen einer Differenzialgleichung durch einen sogenannten Potenzreihenansatz zu gewinnen. Wir erläutern die zu Grunde liegende Idee auch nur für den Fall linearer Differenzialgleichungen 2. Ordnung.

Satz 20.16 *Es sei $r > 0$, und es seien*

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu\,, \qquad q(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu z^\nu$$

Potenzreihen mit Konvergenzradius $\geq r$. Ferner sei $p_0 \notin \mathbb{N}$. Sind $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{K}$ beliebig, so definieren wir die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$\begin{array}{lll} a_0 = \eta_0\,, & a_1 = \eta_1\,, & \textit{falls} \quad p_0 = q_0 = 0 \\ a_0 = \eta_0\,, & a_1 = -\frac{q_0}{p_0}a_0\,, & \textit{falls} \quad p_0 \neq 0 \\ a_0 = 0\,, & a_1 = \eta_1\,, & \textit{falls} \quad p_0 = 0, q_0 \neq 0 \end{array}$$

sowie

$$a_{\nu+1} := \frac{1}{(\nu+1)(\nu-p_0)} \sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu\, p_{\nu+1-\mu} + q_{\nu-\mu}) a_\mu \qquad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt: Hat die Potenzreihe $u(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *Konvergenzradius* $\geq r$, *so ist*

$$z u''(z) = p(z)u'(z) + q(z)u(z) \qquad (|z| < r)$$

und damit ist insbesondere u *eine Lösung der Differenzialgleichung*

$$y'' = \frac{p(t)}{t} y' + \frac{q(t)}{t} y$$

auf $(0, r)$ *und auf* $(-r, 0)$.

Beweis. Nach S. 12.5 gilt

$$\begin{aligned} u'(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) a_{\nu+1} z^\nu \\ u''(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2) a_{\nu+2} z^\nu \end{aligned} \qquad (|z| < r)\,.$$

Also erhalten wir mit Hilfe des Cauchy-Produktes

$$\begin{aligned} &z u''(z) - p(z)u'(z) - q(z)u(z) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\nu\, a_{\nu+1} z^\nu - \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) a_{\nu+1} z^\nu\right) - \left(\sum_{0}^{\infty} q_\nu z^\nu\right)\left(\sum_{0}^{\infty} a_\nu z^\nu\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\nu\, a_{\nu+1} z^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu+1) a_{\mu+1} p_{\nu-\mu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} q_{\nu-\mu} a_\mu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \underbrace{\left[(\nu+1)\nu\, a_{\nu+1} - (\nu+1) p_0 a_{\nu+1} - \sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu\, p_{\nu+1-\mu} + q_{\nu-\mu}) a_\mu\right]}_{=:b_\nu} \end{aligned} .$$

Nach Voraussetzung gilt $b_\nu = 0$ $(\nu \in \mathbb{N})$, und für $\nu = 0$ erhalten wir

$$b_0 = -p_0 a_1 - q_0 a_0\,.$$

Die Bedingungen an a_0, a_1 sind gerade so eingerichtet, dass stets $b_0 = 0$ ist. □

Bemerkung 20.17 1. Man kann beweisen, dass die Potenzreihe u stets Konvergenzradius $\geq r$ hat (falls dies für p und q gilt). Wir verzichten auf den (mit den uns derzeit

zur Verfügung stehenden Mitteln etwas aufwändigen) Beweis. In den Beispielen ist die Konvergenz meist leicht zu sehen.
2. Gilt $p_0 = q_0 = 0$, so folgt

$$\tilde{p}(t) = \frac{p(t)}{t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu t^{\nu-1}\,, \tilde{q}(t) = \frac{q(t)}{t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu t^{\nu-1}\,,$$

d.h. wir können die Differenzialgleichung

$$y'' = \tilde{p}(t)y' + \tilde{q}(t)y \quad (= \frac{p(t)}{t}y' + \frac{q(t)}{t}y \text{ für } t \neq 0)$$

auf ganz $I = (-r, r)$ betrachten. In diesem Fall erhalten wir, indem wir speziell etwa die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Anfangsbedingungen wählen (man beachte: dann gilt $u(0) = \eta_0, u'(0) = \eta_1$), ein Fundamentalsystem für diese Gleichung.

Beispiel 20.18 1. Wir betrachten für festes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$y'' = 2ty' - \lambda y \qquad \text{auf} \quad I = \mathbb{R}$$

(Hermitesche Differenzialgleichung). Hier ist

$$p(t) = 2t^2 \qquad q(t) = -\lambda t\,,$$

d.h.

$$\begin{array}{ll} p_2 = 2\,, & p_\nu = 0 \quad \text{sonst} \\ q_1 = -\lambda\,, & q_\nu = 0 \quad \text{sonst} \end{array} .$$

Wir sind also in der Situation von B. 20.17.2 (d. h. $p_0 = q_0 = 0$).
Die Rekursionsformel aus S. 20.16 ergibt hier

$$a_{\nu+1} = \frac{2(\nu-1)-\lambda}{(\nu+1)\nu} a_{\nu-1} \qquad (\nu \in \mathbb{N})\,.$$

Wählen wir speziell $a_0 = \eta_0 = 1, a_1 = \eta_1 = 0$, so erhalten wir

$$u_0(t; 0; 1, 0) = 1 - \frac{\lambda}{2!}t^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}t^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}t^6 \ldots \left(= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^{2\mu}}{(2\mu)!} \prod_{k=0}^{\mu-1} (4k - \lambda) \right) .$$

Mit $a_0 = \eta_0 = 0$ und $a_1 = \eta_1 = 1$ ergibt sich entsprechend

$$u_0(t; 0; 0, 1) = t + \frac{2-\lambda}{3!}t^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}t^5 \ldots \left(= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \prod_{k=0}^{\mu-1} (4k + 2 - \lambda) \right) .$$

Beide Potenzreihen konvergieren auf $\mathbb{R}$ und bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung.

2. Wir betrachten für feste $a, b \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$y'' = \frac{t-b}{t} y' + \frac{a}{t} y$$

(Kummersche Differenzialgleichung). Hier ist

$$p(t) = t - b, \qquad q(t) = a\,,$$

d.h.

$$\begin{array}{llll} p_0 = -b, & p_1 = 1, & p_\nu = 0 & \text{sonst} \\ q_0 = a, & q_\nu = 0 & \text{sonst.} & \end{array}$$

Für $-b \notin \mathbb{N}_0$ ergibt die Rekursionsformel aus S. 20.16

$$a_1 = \frac{aa_0}{b} \quad \text{und} \quad a_{\nu+1} = \frac{\nu + a}{(\nu+1)(\nu+b)} \cdot a_\nu \qquad (\nu \in \mathbb{N})\,.$$

Wählen wir etwa $\eta_0 = a_0 = 1$, so ergibt sich

$$u(t) = 1 + \frac{a}{b} t + \frac{(1+a)a}{(1+b)b} \frac{t^2}{2} + \frac{(2+a)(1+a)a}{(2+b)(1+b)b} \frac{t^3}{3!} + \dots\,,$$

d.h.

$$u(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu}{(b)_\nu \nu!} t^\nu \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} (c)_\nu := c(c+1)\dots(c+\nu-1) \\ (c)_0 := 1 \end{array}\,.$$

Die Potenzreihe konvergiert auf $\mathbb{R}$. Die Funktion u heißt Kummer-Funktion (mit Parametern a, b) oder auch konfluente hypergeometrische Funktion.

21 Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Nach den Überlegungen der letzten Abschnitte stellt sich weiter die Frage, wie man Fundamentalsysteme homogener Systeme bestimmen kann. Wir wollen diese Frage (jedenfalls im Prinzip) klären für Systeme der Gestalt

$$y' = Ay\,, \tag{21.1}$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ eine feste Matrix ist (also unabhängig von t). Eine solche Gleichung heißt *lineares System mit konstanten Koeffizienten*.
Eine sehr kompakte Darstellung für Fundamentalmatrizen erhält man durch Einführung der Matrix-Exponentialfunktion. Dazu werden wir zunächst allgemeiner das Konzept sogenannter Matrix-Potenzreihen kurz vorstellen:
Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein Banachraum. Ist (A_n) eine Folge in E so, dass die Folge (S_n) mit $S_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} A_\nu$ konvergent in E ist, so spricht man (wie im skalaren Fall) von Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$ und setzt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu\,.$$

Dabei gilt: Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} ||A_\nu|| < \infty$, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$ konvergent, d. h. absolute Konvergenz impliziert Konvergenz.
(Denn: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} \|\, A_\nu|| < \varepsilon \qquad (m > n \geq N_\varepsilon)\,.$$

Also folgt für $m > n \geq N_\varepsilon$

$$||S_m - S_n|| = ||\sum_{\nu=n+1}^{m} A_\nu|| \leq \sum_{\nu=n+1}^{m} ||A_\nu|| < \varepsilon\,.$$

Damit ist (S_n) eine Cauchy-Folge in E. Da $(E, d_{||\cdot||})$ vollständig ist, konvergiert (S_n).)
Man kann unter Verwendung von S. 15.11 leicht zeigen (Ü):
$(\mathbb{K}^{m\times d}, ||\cdot||)$ ist ein Banachraum. Außerdem gilt hier für jede Folge (A_n) in $\mathbb{K}^{m\times d}$ mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} ||A_\nu|| < \infty$ und $B \in \mathbb{K}^{p\times m}$, $C \in \mathbb{K}^{d\times q}$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} BA_\nu = B\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \qquad \text{und} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu C = \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu\Big)C\,.$$

(Denn: Zunächst gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} ||BA\nu|| \leq ||B|| \sum_{\nu=0}^{\infty} ||A_\nu|| < \infty$, also ist auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} BA_\nu$ konvergent. Außerdem erhalten wir

$$||\sum_{\nu=0}^{n} BA_\nu - B\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu|| \leq ||B|| \cdot ||\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu|| \to 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

d.h. $\sum_{\nu=0}^{n} BA_\nu \to B\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$.
Entsprechend argumentiert man mit C statt B.)
Schließlich erhalten wir ([Ü]): ist $B_\nu = (b_{jk}^{(\nu)})$ so gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{jk}^{(\nu)}\right)_{j,k=1,\ldots,d}$.

Nun sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Ist $B \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mit $||B|| < r$, so ist $||c_\nu B^\nu|| \leq |c_\nu| \cdot ||B||^\nu$. Nach dem Satz von Cauchy-Hadamard und dem Majorantenkriterium ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} ||c_\nu B^\nu||$ konvergent. Damit existiert auch

$$f(B) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu B^\nu \in \mathbb{K}^{d\times d}\,.$$

Es gilt

Satz 21.1 *Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Ist $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$, so definieren wir $\psi : U_{r/||A||}(0) \to \mathbb{K}^{d\times d}$ durch*

$$\psi(z) := f(zA) \qquad \left(|z| < \frac{r}{||A||}\right).$$

Dann gilt: ψ ist differenzierbar auf $U_{r/||A||}(0)$ mit

$$\psi'(z) = A \cdot f'(zA) = f'(zA) \cdot A \qquad \left(|z| < \frac{r}{||A||}\right).$$

Beweis. Zunächst beachte man, dass nach der Vorbemerkung $f(zA)$ existiert, da $||zA|| = |z| \cdot ||A|| < r$ gilt. Da auch die Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu z^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) c_{\nu+1} z^\nu$$

Konvergenzradius r hat, existiert auch $f'(zA)$ für alle z mit $|z| < r/||A||$. Außerdem gilt mit $A^\nu = (a_{jk}^{(\nu)})_{j,k=1,\ldots,d}$

$$f(zA) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu a_{jk}^{(\nu)} z^\nu\right)_{j,k=1,\ldots,d},$$

d.h. alle Einträge der Matrix sind Potenzreihen in der Variablen z (mit Konvergenzradius $\geq r/||A||$). Da diese gliedweise differenziert werden dürfen (S. 12.5), erhalten wir für $|z| < r/||A||$

$$\begin{aligned}
\psi'(z) &= \left(\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu a_{jk}^{(\nu)} z^\nu\Big)'\right)_{j,k=1,\ldots,d} = \\
&= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) c_{\nu+1} a_{jk}^{(\nu+1)} z^\nu\right)_{j,k=1,\ldots,d} = \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) c_{\nu+1} z^\nu A^{\nu+1} = A f'(zA) \; (= f'(zA)A)\,.
\end{aligned}$$

□

Betrachten wir speziell die Potenzreihe

$$e^z = \exp(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$$

mit Konvergenzradius $r = \infty$, so ergibt sich für $\psi(z) = \exp(zA)$ die fürs Weitere zentrale Folgerung

$$\psi'(z) = A \cdot \exp(zA) \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$$

für $\exp(B)$ schreiben wir auch wieder kurz e^B. Damit ergibt sich

$$\boxed{(e^{zA})' = Ae^{zA} = e^{zA}A.} \tag{21.2}$$

Die Eleganz dieser Betrachtungen belegt folgender

Satz 21.2 *Es sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$. Dann ist für alle $\eta \in \mathbb{K}^d$ die (maximale) Lösung des AWP*

$$y' = Ay\,, \qquad y(0) = \eta$$

gegeben durch

$$\varphi(t, 0, \eta) = e^{tA} \cdot \eta \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Außerdem ist e^{tA} eine Fundamentalmatrix für (21.1).

Beweis. Mit der Produktregel für matrixwertige Funktionen aus dem Beweis zu S. 20.8 ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(e^{tA} \cdot \eta) = (e^{tA})' \cdot \eta \overset{(21.2)}{=} Ae^{tA} \cdot \eta \qquad (t \in \mathbb{R})\,,$$

d.h. $t \mapsto e^{tA} \cdot \eta$ ist Lösung von (21.1). Außerdem ist

$$e^{tA} \cdot \eta|_{t=0} = e^{0A} \cdot \eta = E_d \eta = \eta\,.$$

Also ist $\varphi(t,0,\eta) = e^{tA}\cdot\eta$.
Wählt man speziell $\eta = e_k$, wobei e_k den k-ten Einheitsvektor bezeichnet, so ist $e^{tA}\cdot e_k$ die k-te Spalte von e^{tA}, d.h. jede Spalte ist Lösung von (21.1). Da $e^{0A} = E_d$ gilt, sind die Spalten (nach S. 20.4 mit $\xi = 0$) linear unabhängig. Folglich ist $e^{tA}e_1, ..., e^{tA}e_d$ ein Fundamentalsystem, d.h. e^{tA} eine Fundamentralmatrix. □

Im Prinzip haben wir also ein Fundamentalsystem für (21.1) gefunden (nämlich das System $e^{tA}e_1, ..., e^{tA}e_d$). Es stellt sich allerdings dabei die Frage, wie man e^{tA} „konkret“ berechnen kann. Dazu versucht man, die Berechnung von e^{tA} für allgemeines A auf die Berechnung von $e^{t\tilde{A}}$ für gewisse einfache Matrizen $\tilde{A}$ zurück zu führen.
Um in diese Richtung weitergehen zu können, brauchen wir zunächst einige Rechenregeln für die Matrixexponentialfunktion.

Satz 21.3 *Es seien $A, B, C \in \mathbb{K}^{d\times d}$.*

1. *Gilt $AB = BA$, so folgt $e^Ae^B = e^{A+B}$.*
   (Insbesondere gilt damit $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und $e^Ae^{-A} = e^0 = E_d$, d. h. e^A ist stets invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.)
2. *Ist C invertierbar, so gilt*
$$e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^AC\,.$$
3. *Hat A Blockdiagonalform*
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{A_m} \end{pmatrix},$$
   d.h. $A = \operatorname{diag}(A_1, ..., A_m)$, so gilt
$$e^A = \operatorname{diag}(e^{A_1}, ..., e^{A_m})\,.$$

Beweis. 1. Mit $A^\nu =: (a^{(\nu)}_{jk})$ und $B^\nu =: (b^{(\nu)}_{jk})$ erhält man für den (j,k)-ten Eintrag von e^Ae^B (Cauchy-Produkt)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{d}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}a^{(\nu)}_{j\ell}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}b^{(\nu)}_{\ell k}\right) = \\
&= \sum_{\ell=1}^{d}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{(n-\nu)!}}_{=\frac{1}{n!}\binom{n}{\nu}}\;a^{(\nu)}_{j\ell}\,b^{(n-\nu)}_{\ell k} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\sum_{\ell=1}^{d}a^{(\nu)}_{j\ell}\,b^{(n-\nu)}_{\ell k}\,,
\end{aligned}$$

was auch der (j,k)-te Eintrag von $\sum_{n=0}^{\infty} S_n/n!$ mit

$$S_n := \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A^\nu B^{n-\nu}$$

ist. Aus $AB = BA$ folgt die Gültigkeit der binomischen Formel $S_n = (A+B)^n$ und damit ist $\sum_{n=0}^{\infty} S_n/n! = e^{A+B}$.
2. Es gilt

$$(C^{-1}AC)^\nu = C^{-1}A^\nu C \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$

(Beweis per Induktion). Also erhalten wir

$$C^{-1}e^A C = C^{-1}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}A^\nu\right)C = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}C^{-1}A^\nu C = e^{C^{-1}AC}.$$

3. Ist

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & O \\ & & \ddots & \\ & O & & \boxed{A_m} \end{pmatrix} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)\,,$$

so ist

$$A^\nu = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^\nu} & & & \\ & \boxed{A_2^\nu} & O & \\ & & \ddots & \\ & O & & \boxed{A_m^\nu} \end{pmatrix} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)\,,$$

also ergibt sich 3. durch Betrachtung der (j,k)-ten Einträge von e^A. □

Bemerkung 21.4 Es sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ diagonalisierbar, d.h. es existieren eine Diagonalmatrix $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ sowie eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mit

$$A = C\Lambda C^{-1}$$

(dabei sind $\lambda_1, ..., \lambda_d$ die Eigenwerte von A und die Spalten von C, also $Ce_1, ..., Ce_d$, bilden eine Basis aus Eigenvektoren von A).
Dann gilt mit S. 21.3

$$e^{tA} = Ce^{t\Lambda}C^{-1} = C \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_d t})C^{-1}\,.$$

Die Spalten bilden nach S. 21.2 ein Fundamentalsystem. Außerdem ist mit $c_k := Ce_k$ auch

$$e^{\lambda_1 t}c_1, \ldots, e^{\lambda_d t}c_d$$

ein Fundamentalsystem (folgt etwa aus $e^{\lambda_k t}c_k = e^{tA}c_k$ und S. 21.2).

Beispiel 21.5 1. Wir betrachten das lineare System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y = Ay\,.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -2\,,$$

also haben wir die Eigenwerte 1 und -2. Weiter rechnet man nach, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(linear unabhängige) Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind, und dass

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$ ist. Also gilt hier

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t & -e^t & e^t \\ -e^t & 2e^t & e^t \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^t + e^{-2t} & -e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ -e^t + e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & e^t - e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Spalten bilden bilden nach S. 21.2 ein Fundamentalsystem.
Direkter erhält man allerdings (vgl. B. 21.4) das Fundamentalsystem

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Wir betrachten das lineare System

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} y = Ay\,.$$

Es gilt

$$\det(A - AE) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)\,,$$

also haben wir (in $\mathbb{C}$) die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = 1 + i\,, \quad \lambda_3 = 1 - i \quad (= \overline{\lambda_2})\,.$$

Zugehörige Eigenvektoren sind

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = \begin{pmatrix} 3+4i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (= \overline{c_2})\,.$$

Damit bilden etwa

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 3+4i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ (als Gleichung in $\mathbb{C}$ betrachtet).
Ein reelles Fundamentalsystem erhält man, indem man

$$e^{(1\pm i)t} \begin{pmatrix} 3 \mp 4i \\ \pm i \\ i \end{pmatrix}$$

durch

$$\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ersetzt. ([Ü])

Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 3-4i & 3+4i \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3-4i & 3+4i \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 4e^t - 4e^t \cos t + 3e^t \sin t & -3e^t + 3e^t \cos t + 4e^t \sin t \\ 0 & e^t \cos t & -e^t \sin t \\ 0 & e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Schwieriger wird die Berechnung eines Fundamentalsystems natürlich dann, wenn A nicht diagonalisierbar ist. Aus der Linearen Algebra sollte bekannt sein, dass jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ (die natürlich auch rein reelle Einträge haben kann) ähnlich zu einer Blockdiagonalmatrix der Form

$$
B = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & O \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}
$$

ist (d.h. $A = CBC^{-1}$ für eine Matrix C mit $\det(C) \neq 0$), wobei der Jordan-Block J_k die Form

$$
J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ O & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \quad J_k = (\lambda_k)
$$

hat.

Nach S. 21.3 reduziert sich die Berechnung der Matrix e^{tA} auf die Berechnung der Matrizen C, C^{-1} sowie e^{tJ_k} $(k = 1, ..., m)$. Aus Sicht der Analysis stellt sich dabei insbesondere die Frage nach der Berechnung von e^{tJ}, wobei J eine Jordan-Matrix obiger Gestalt ist.

Satz 21.6 *Es sei*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & O & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_r + N_r \in \mathbb{K}^{r\times r}$$

eine Jordan-Matrix. Dann gilt $e^{tJ} = e^{\lambda t}e^{tN_r}$ *mit*

$$e^{tN_r} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & O & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zunächst ist

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & O & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{r\times r},$$

also (beachte: λE_r und N_r vertauschen)

$$e^{tJ} = e^{t\lambda E_r}e^{tN_r} = e^{t\lambda}e^{tN_r}.$$

Weiter rechnet man nach, dass

$$N_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & O & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, N_r^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & O & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_r^\nu = 0 \ (\nu \geq r)$$

gilt (d.h. die „1-Diagonale rückt jeweils um einen Schritt nach rechts“). Hieraus folgt

$$e^{tN_r} = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} t^\nu N_r^\nu = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel 21.7 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & O \\ O & \boxed{J_2} \end{pmatrix}$$

mit

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = (2)\,.$$

Dann gilt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend erhalten wir mit S. 21.6 und den vorangegangenen Überlegungen folgendes Ergebnis über die Struktur des Lösungsraumes.

Satz 21.8 *Es sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und für $k = 1, \ldots, m$ seien $J_k = \lambda_k E_{r_k} + N_{r_k}$ wie oben die zugehörigen Jordanblöcke. Dann existiert ein Fundamentalsystem der Form*

$$t \mapsto e^{\lambda_k t} P^{(k,\ell)}(t) \qquad k = 1, ..., m;\ \ell = 0, ..., r_k - 1\,,$$

wobei die Komponenten $P_1^{(k,\ell)}, ..., P_d^{(k,\ell)}$ von $P^{(k,\ell)}$ Polynome vom Grad $\leq \ell$ sind.

Beweis. Es sei $C \in \mathbb{C}^{d\times d}$ wie oben, d.h.

$$e^{tA}C = C \cdot \operatorname{diag}(e^{tJ_1}, ..., e^{tJ_m}) = C \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t} e^{tN_{r_1}}, ..., e^{\lambda_m t} e^{tN_{r_m}})\,.$$

Da e^{tA} eine Fundamentalmatrix ist, ist

$$e^{tA}Ce_1, ..., e^{tA}Ce_d$$

ein Fundamentalsystem. Es gilt mit $C = (c_{jk})$

$$C \cdot \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}e^{tN_{r_1}}, ..., e^{\lambda_m t}e^{tN_{r_m}}) =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1,r_1} & \dots & c_{1,r_1+r_2} & \dots & c_{1,d} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{d1} & \dots & c_{d,r_1} & \dots & c_{d,r_1+r_2} & \dots & c_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{e^{\lambda_1 t}e^{tN_{r_1}}} & & & O \\ & \boxed{e^{\lambda_2 t}e^{tN_{r_2}}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{e^{\lambda_m t}e^{tN_{r_m}}} \end{pmatrix}.$$

Die ersten r_1 Spalten haben die Form

$$\begin{matrix} e^{\lambda_1 t}c_{11} & e^{\lambda_1 t}(c_{11}t + c_{12}) & \dots & e^{\lambda_1 t}\Big(c_{11}\frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!} + c_{12}\frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!} + \cdots + c_{1r_1}\Big) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_1 t}c_{d1} & e^{\lambda_1 t}(c_{d1}t + c_{d2}) & \dots & e^{\lambda_1 t}\Big(c_{d1}\frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!} + c_{d2}\frac{t^{r_1-2}}{(r_1-2)!} + \cdots + c_{dr_1}\Big) \end{matrix}$$

und entsprechend in den

$$\begin{matrix} \text{Spalten}\, r_1 + 1, ..., r_1 + r_2 & \text{mit} & e^{\lambda_2 t}(\dots) \\ \vdots & & \\ \text{Spalten}\, \sum_{j=1}^{m-1} r_j + 1, ..., \sum_{j=1}^{m} r_j = d & \text{mit} & e^{\lambda_m t}(\dots) \end{matrix}.$$

Damit ergibt sich die Behauptung. □

Ein wesentlicher Untersuchungsgegenstand bei Differenzialgleichungen ist die Frage nach dem Verhalten von Lösungen wenn t sich einem der Randpunkte des Lösungsintervalls nähert. Bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten interessiert also das Verhalten für $t \to \infty$ (oder $t \to -\infty$; wir beschränken uns auf den Fall $t \to \infty$). Als Anwendung von S. 21.8 erhalten wir

Satz 21.9 *(Stabilitätskriterium)*
Es sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und $\sigma(A) := \{\lambda : \lambda$ Eigenwert von $A\}$. Dann sind äquivalent:

a) Es existieren $M, \alpha > 0$ mit $||e^{tA}|| \le Me^{-\alpha t}$ für $t \ge 0$.

b) für alle Lösungen ψ von (21.1) gilt $\psi(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.

c) für alle $\lambda \in \sigma(A)$ ist

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0\,.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist $\psi(0) = \eta$, so ist $\psi(t) = e^{tA}\eta$, also $|\psi(t)| \leq ||e^{tA}||\,|\eta| \to 0\,(t \to \infty)$.
b) $\Rightarrow$ c): Angenommen, es existiert ein Eigenwert λ von A mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Ist $P^{(0)}$ das zugehörige Polynom vom Grad 0 aus S. 21.8 (dann ist $P^{(0)} \neq 0$ ein Eigenvektor von A), so ist

$$\psi(t) = e^{\lambda t} P^{(0)}$$

eine Lösung von (21.1) mit $|\psi(t)| = e^{t\mathrm{Re}\lambda}|P^{(0)}| \geq |P^{(0)}|$ für alle $t \geq 0$. Widerspruch zu $\psi(t) \to 0$ für $t \to \infty$!
c) $\Rightarrow$ a): Es sei $\alpha > 0$ so, dass $\mathrm{Re}(\lambda) < -\alpha(< 0)$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Für jedes $k \in \{1, ..., d\}$ ist $e^{tA}e_k$ Linearkombination von Funktionen der Form

$$e^{\lambda t} t^\ell y\,,$$

wobei $\ell \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \sigma(A)$ und $y \in \mathbb{K}^d$. Für jedes solche Tripel (ℓ, λ, y) existiert ein $M_{\ell,\lambda,y} > 0$ mit

$$|e^{\lambda t} t^\ell y| \leq e^{t\mathrm{Re}\lambda} t^\ell |y| \leq M_{\ell,\lambda,y} e^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0)\,.$$

Also existieren $M_k > 0$ mit $|e^{tA}e_k| \leq M_k e^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$. Da

$$||e^{tA}|| \leq \sum_{k=1}^{d} |e^{tA}e_k| \leq e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{d} M_k$$

gilt, folgt a). □

Bemerkung 21.10 Hat man ein (inhomogenes) lineares System mit konstanter Koeffizientenmatrix A, also

$$y' = Ay + b(t)$$

mit $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und $b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig, so erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung nach S. 20.8 und S. 21.3.1 durch

$$\varphi_b(t, \xi, 0) = e^{tA} \int_\xi^t e^{-sA} b(s) ds\,.$$

Außerdem ist dann

$$\varphi_b(t, \xi, \eta) = \varphi_0(t, \xi, \eta) + \varphi(t) = e^{tA}\Big[e^{-\xi A}\eta + \int_\xi^t e^{-sA} b(s) ds\Big]\,.$$

Ist auch die rechte Seite b unabhängig von t (also $b(t) \equiv b$ auf $\mathbb{R}$), so erhält man dabei, falls A invertierbar ist,

$$\begin{aligned} \varphi_b(t, \xi, \eta) &= e^{tA}(e^{-\xi A}\eta - e^{-tA}A^{-1}b + e^{-\xi A}A^{-1}b) \\ &= e^{(t-\xi)A}(\eta + A^{-1}b) - A^{-1}b \end{aligned}$$

Beispiel 21.11 Wir betrachten (mit $k = m = 1$) das lineare System aus B. 18.8, d.h.

$$\begin{pmatrix} Y' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ -\overline{M} \end{pmatrix}$$

(mit Konstanten $s := 1 - c, a, d, \overline{M} > 0$). Es gilt

$$\det(A - \lambda E) := (-s - \lambda)(-\lambda) + ad = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - ad}, & \text{falls} \quad \Delta := \frac{s^2}{4} - ad \geq 0 \\ \lambda_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm i\sqrt{ad - \frac{s^2}{4}} & \text{falls} \quad \Delta < 0 \end{cases} .$$

Dabei gilt in beiden Fällen

$$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0\,,$$

also konvergieren nach S. 21.9 alle Lösungen der homogenen Gleichung gegen 0 für $t \to \infty$ (mit exponentieller Geschwindigkeit). Außerdem gilt $||e^{uA}|| \to 0$ für $u \to \infty$. Folglich erhalten wir mit B. 21.10 für alle Lösungen φ der inhomogenen Gleichung

$$\begin{pmatrix} Y(t) \\ r(t) \end{pmatrix} \to -A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -1/d \\ 1/a & s/(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ -\overline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{M}/d \\ (a_0 d - s\overline{M})/(da) \end{pmatrix} \ (t \to \infty)\,.$$

Insbesondere würde nach diesem Modell das Einkommen $Y(t)$ sich für $t \to \infty$ der Konstante $\overline{M}/d$ annähern, d.h. ist $\overline{M}$ (Geldangebot) „groß" und d (Verhältnis von GeldnachFrage zu Einkommen) „klein", so wird das Einkommen im Zeitverlauf „groß" werden. [„It's money, that matters"]

Wie im Abschnitt vorher wollen wir uns auch hier gesondert mit (skalaren) linearen Differenzialgleichungen höherer Ordnung beschäftigen. Es seien $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y^{(\nu)}$$

bzw.

$$L(y) := y^{(n)} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y^{(\nu)} = 0 \tag{21.3}$$

eine (homogene) *lineare Differenzialgleichung $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.*

Natürlich kann man zur Berechnung eines Fundamentalsystems, also n linear unabhängiger Lösungen von (21.3) auf $\mathbb{R}$, so vorgehen, dass man die Matrix e^{tA} für das entsprechende lineare System (20.9) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

bestimmt. Wir wollen hier jedoch eine direktere Methode herleiten, die lediglich die Eigenwerte von A (inkl. algebraischen Vielfachheiten), also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, benötigt.
Durch Entwicklung nach der letzten Zeile sieht man, dass gilt

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0)\,,$$

d.h. die Koeffizienten sind bis auf Vorzeichen die $a_0, ..., a_{n-1}$. Es gilt nun

Satz 21.12 *Es seien $\lambda_1, ..., \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polynoms P mit algebraischen Vielfachheiten (d. h. Nullstellenordnungen)$r_1, ..., r_m$. Dann bilden die Funktionen*

$$t \mapsto e^{\lambda_k t} t^\ell \qquad (\ell = 0, ..., r_k - 1; k = 1, ..., m)$$

ein Fundamentalsystem von (21.3) (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Beweis. Ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

die Koeffizientenmatrix des entsprechenden Systems (20.9), so existiert nach S. 21.8 ein Fundamentalsystem für dieses System, bestehend aus Funktionen der Form

$$e^{\lambda_{\mu_k} t} P^{(k,\ell)}(t) \qquad (k = 1, ..., \tilde{m};\ \ell = 0, ..., \tilde{r}_k - 1)\,,$$

wobei $\tilde{m}$ die Anzahl der entsprechenden Jordanblöcke und $\tilde{r}_k$ deren Dimension sowie $\mu_k \in \{1, ..., m\}$ ist (dabei gilt $\tilde{m} \geq m$). Da die Abbildung $j : L_0 - M_0$ aus dem Beweis zu S. 20.11 ein Isomorphismus ist, ergeben die ersten Komponenten

$$e^{\lambda_{\mu_k} t} Q^{(k,\ell)}(t) := e^{\lambda_{\mu_k} t} P_1^{(k,\ell)}(t) \qquad (k = 1, ..., \tilde{m};\ \ell = 0, ..., \tilde{r}_k - 1)$$

eine Basis von M_0, also ein Fundamentalsystem zu (21.3). Dabei sind die Funktionen $Q^{(k,\ell)}$ Polynome vom Grad $\leq \ell$. Hieraus folgt, dass $\tilde{m} = m$ sein muss, d.h. zu jedem Eigenwert gehört nur ein Jordanblock (was i.A. nicht der Fall ist). (Denn sonst wäre $\lambda_{\mu_k} = \lambda_{\mu_{k'}}$ für $k, k' \in \{1, ..., m\}, k \neq k'$. Dann wären aber $e^{\lambda_{\mu_k} t} Q^{(k,0)}(t)$ und $e^{\lambda_{\mu_{k'}} t} Q^{(k',0)}(t)$ linear abhängig.)
O.E. sei nun $\mu_k = k$ für $k = 1, ..., m$ (ansonsten: Umnummerieren).
Damit ist, da $n = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \tilde{r}_k = \sum_{k=1}^{m} r_k$ (und $\tilde{r_k} \leq r_k$), auch $r_k = \tilde{r}_k$. Also haben wir ein Fundamentalsystem der Form

$$e^{\lambda_k t} \cdot Q^{(k,\ell)}(t) \qquad (k = 1, ..., m;\ \ell = 0, ..., r_k - 1)\,.$$

Weiter bilden die Polynome $Q^{(k,0)}, ..., Q^{(k,r_k-1)}$ eine Basis des Raumes der Polynome vom Grad $\leq r_k - 1$ (denn aus der linearen Unabhängigkeit von

$$e^{\lambda_k t} Q^{(k,0)}(t), ..., e^{\lambda_k t} Q^{(k,r_k-1)}(t)$$

folgt auch die lineare Unabhängigkeit der Polynome $Q^{(k,0)}, ..., Q^{(k,r_k-1)}$). Also lässt sich jedes Monom $t^\ell, \ell = 0, ..., r_k - 1$, als Linearkombination der $Q^{(k,0)}, ..., Q^{(k,r_k-1)}$ schreiben. Folglich sind

$$e^{\lambda_k t} t^\ell \qquad (k = 1, ..., m;\ \ell = 0, ..., r_k - 1)$$

Lösungen von (21.3). Nach obigen Überlegungen ist jedes $v \in M_0$ Linearkombination dieser (insgesamt n) Funktionen. Also bilden diese eine Basis des n-dimensionalen Raumes M_0. □

Bemerkung 21.13 Ist $\lambda = \mu + i\sigma$ eine nichtreelle r-fache Nullstelle und ist $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, so ist auch $\overline{\lambda} = \mu - i\sigma$ eine r-fache Nullstelle charakteristischen Polynoms. In diesem Fall haben wir also die $2r$ Lösungen

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} t^\ell &= e^{\mu t} e^{i\sigma t} t^\ell \\ e^{\overline{\lambda} t} t^\ell &= e^{\mu t} e^{-i\sigma t} t^\ell \end{aligned} \qquad \ell = 0, ..., r-1\,.$$

Ein reelles Fundamentalsystem erhält man dann, indem man für alle solchen Eigenwerte diese Lösungen ersetzt durch ([Ü])

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^{\lambda t} t^\ell) &= e^{\mu t} \cos(\sigma t) t^\ell \\ \mathrm{Im}(e^{\lambda t} t^\ell) &= e^{\mu t} \sin(\sigma t) t^\ell \end{aligned} \qquad \ell = 0, ..., r-1\,.$$

Beispiel 21.14 Auch hier betrachten wir noch einmal das B. 18.8 (mit $k = m = 1$). Dort hatten wir für Y auch die (inhomogene) lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$Y''(t) + (1-c)Y'(t) + adY(t) = a\overline{M}$$

hergeleitet. Für das charakteristische Polynom gilt hier (mit $s = 1 - c$)

$$P(\lambda) = \lambda^2 + s\lambda + ad\,,$$

also

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - ad}\,, & \text{Falls } \frac{s^2}{4} - ad \geq 0 \\ -\frac{s}{2} \pm i\sqrt{ad - \frac{s^2}{4}}\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. B. 21.11). Offensichtlich ist

$$v_b(t) = \frac{\overline{M}}{d}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.
Nach S. 20.11, S. 21.12 und B. 21.13 sind alle Lösungen von der Form

$$v(t) = \begin{cases} \overline{M}/d + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,, & \text{Falls } s^2/4 - ad > 0 \\ \overline{M}/d + c_1 e^{st/2} + c_2 t e^{-st/2}\,, & \text{Falls } s^2/4 - ad = 0 \\ \overline{M}/d + c_1 e^{-st/2}\cos(\sigma t) + c_2 e^{-st/2}\sin(\sigma t)\,, & \text{Falls } \sigma^2 := ad - s^2/4 > 0 \end{cases}\,,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

22 Wege, Kurven und zusammenhängende Mengen

Ist $\varphi : I \to \mathbb{K}^d$ Lösung einer Differentialgleichung, so beschreibt $\{\varphi(t) : t \in I_0\}$, wobei $I_0 \subset I$ kompakt ist, eine sogenannte Kurve in $\mathbb{K}^d$. Wir wollen nun allgemein definieren, was man unter Wegen und Kurven versteht.

Definition 22.1 Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Ist $\gamma : [a, b] \to X$ stetig, so heißt γ ein *Weg* (in X). Der Punkt $\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* des Weges und $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* des Weges. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt der Weg *geschlossen*. Ferner heißt γ ein *Jordanweg*, falls $\gamma_{[a,b)}$ injektiv ist.

2. Es sei $\Gamma \subset X$. Dann heißt Γ eine *Kurve* (oder ein *Bogen*) in X, falls ein Weg γ existiert mit
$$\Gamma = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} = W(\gamma)\,.$$
In diesem Fall heißt γ eine *Parameterdarstellung* (oder *Parametrisierung*) von Γ. Eine Kurve Γ heißt *Jordankurve*, falls eine Parameterdarstellung γ so existiert, dass der Weg γ ein Jordanweg ist. Eine solche Parameterdarstellung heißt dann auch *Jordan-Darstellung* von Γ. Schließlich nennt man eine Jordankurve *geschlossen*, falls eine Jordandarstellung γ so existiert, dass der Weg γ geschlossen ist.

Beispiel 22.2 1. Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$
Für $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist dann $\gamma_{a,b} = \varphi_{|[a,b]}$ ein Weg. Also ist
$$\Gamma = \Gamma_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : t \in [a, b] \right\}$$
eine Kurve in $\mathbb{R}^2$. Ist dabei $b - a \geq 2\pi$, so ist
$$\Gamma = \Gamma_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$$
der Einheitskreis.
Für $a = 0, b = 2\pi$ ist
$$\gamma_{a,b}(b) = \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(0) = \gamma_{a,b}(a)\,,$$
also ist der Weg $\gamma_{0,2\pi}$ geschlossen.
Entsprechendes gilt für die Wege $\gamma_{a,a+2k\pi}$ für $k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$. Ist $b - a \neq 2k\pi$ für

alle $k \in \mathbb{Z}$, so ist $\gamma_{a,b}$ nicht geschlossen. Weiter ist für alle a, b die Kurve $\Gamma = \Gamma_{a,b}$ eine Jordankurve. (Denn: Man kann stets eine Parameterdarstellung so wählen, dass $b - a \leq 2\pi$ gilt. Dann ist $\varphi_{|[a,b)}$ injektiv, denn gilt

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{pmatrix}$$

für $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$, so ist $\tilde{t} = t + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.)
Man beachte aber dabei: Nicht jede Parameterdarstellung γ für Γ ist eine Jordan-Darstellung! (Ist $b - a > 2\pi$, so ist $\varphi_{|[a,b)}$ nicht mehr injektiv.)
Außerdem beachte man, dass Γ viele weitere Parameterdarstellungen hat. So gilt etwa

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,\pi} &= \left\{ (\cos t, \sin t)^T : t \in [0, \pi] \right\} = \\ &= \left\{ (t, \sqrt{1 - t^2})^T : t \in [-1, 1] \right\} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

2. Wir betrachten die Funktion $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = (1 + \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad (t \in [0, 2\pi]) .$$

Dann ist $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$, die sogenannte Kardioide (oder auch Herzkurve), eine geschlossene Jordankurve (denn $\gamma_{|[0,2\pi)}$, ist injektiv und $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$).
3. Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = e^{(1+i)t} = e^t e^{it}$ (die Menge $\gamma(\mathbb{R})$ wird als „logarithmische Spirale“ bezeichet). Dann ist für jedes $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\Gamma_{a,b} = \gamma([a, b])$$

eine Jordankurve.
4. Es seien $x^{(0)}, ..., x^{(n)} \in \mathbb{K}^d$ und $\gamma : [0, n] \to \mathbb{K}^d$ sei definiert durch

$$\gamma(t) = x^{(j-1)} + (t - j + 1)(x^{(j)} - x^{(j-1)}) \quad (t \in [j - 1, j],\ j = 1, \ldots, n).$$

Dann nennen wir γ *Polygonweg* durch $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(n)}$.

Wir werden nun die Frage untersuchen, wie man einem Weg in sinnvoller Weise eine Länge zuordnen kann. Dazu nähern wir einen gegebenen Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{K}^d$ durch Polygonwege an: Ist $Z = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so betrachten wir den Polygonweg durch $x^{(0)} = \gamma(t_0), ..., x^{(n)} = \gamma(t_n)$.
Dessen „Länge“ ist $\sum_{j=1}^{n} |x^{(j)} - x^{(j-1)}|$. Wählt man nun immer feinere Zerlegungen von $[a, b]$, so sollten die Längen der entsprechenden Polygonwege das annähern, was wir als Länge von γ betrachten wollen. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 22.3 Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{K}^d$ ein Weg. Ist $Z = \{t_0, ..., t_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so setzen wir

$$L_Z(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \, .$$

Ist

$$L(\gamma) := \sup\{L_Z(\gamma) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} < \infty \, ,$$

so heißt γ *rektifizierbar* und $L(\gamma)$ heißt *Länge* von Γ.

Man könnte auf den Gedanken kommen, dass jeder Weg (in $\mathbb{K}^d$) rektifizierbar ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies nicht der Fall ist

Beispiel 22.4 Es sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(t, t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)^T, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} .$$

Dann ist γ ein Weg (und $\Gamma = W(\gamma)$ eine Jordankurve).
Ist $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, ..., \frac{1}{2}, 1\} = \{t_0, ..., t_n\}$, so gilt

$$\begin{aligned} L_{Z_n}(\gamma) &\geq \sum_{j=2}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \geq \sum_{j=2}^{n} \left|\gamma_2\left(\frac{1}{n+1-j}\right) - \gamma_2\left(\frac{1}{n+2-j}\right)\right| \\ &= \sum_{j=2}^{n} \left|\frac{1}{n+1-j} \underbrace{\cos(\pi(n+1-j))}_{=(-1)^{n+1-j}} - \frac{1}{n+2-j} \underbrace{\cos(\pi(n+2-j))}_{=(-1)^{n+2-j}}\right| \\ &= \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{n+1-j} + \frac{1}{n+2-j}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \qquad (n \to \infty) \, . \end{aligned}$$

Damit ist $\{L_Z(\gamma) : Z \text{ Zerlegung von } [0, 1]\}$ unbeschränkt, d. h. $L(\gamma) = \infty$.

Es drängt sich natürlich die Frage auf, wie man Längen von Kurven konkret berechnen kann. Die Definition erweist sich schon in einfachsten Fällen als sehr ungeeignet. Oft ist folgender einfache Sachverhalt hilfreich.

Bemerkung 22.5 Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{K}^d$ ein Weg und ist $c \in (a, b)$, so ist γ genau dann rektifizierbar, wenn $\gamma_{|[a,c]}$ und $\gamma_{|[c,b]}$ beide rektifizierbar sind, und in dem Falle gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma_{|[a,c]}) + L(\gamma_{|[c,b]}).$$

(Denn: Wir schreiben kurz $\gamma_{a,c} := \gamma_{[a,c]}$ und $\gamma_{c,b} := \gamma_{[c,b]}$.

„$\Rightarrow$ “ Es sei γ rektifizierbar. Sind $Z_{a,c}$ bzw. $Z_{c,b}$ Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$, so ist $Z = Z_{a,c} \cup Z_{c,b}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, und es gilt

$$L_{Z_{a,c}}(\gamma_{a,c}) + L_{Z_{c,b}}(\gamma_{c,b}) = L_Z(\gamma) \leq L(\gamma)\,.$$

Also gilt: $L(\gamma_{a,c}) < \infty$, $L(\gamma_{c,b}) < \infty$ und

$$L(\gamma_{a,c}) + L(\gamma_{c,b}) \leq L(\gamma)\,.$$

„$\Leftarrow$“ Es sei $Z = \{t_0, ..., t_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $t_{k-1} < c \leq t_k$. Damit ist $Z_{a,c} = \{t_0, ..., t_{k-1}, c\}$ eine Zerlegung von $[a,c]$ und $Z_{c,b} = \{c, t_k, ..., t_n\}$ (bzw. $Z_{c,b} = \{t_k, ..., t_n\}$ im Falle $c = t_k$) eine Zerlegung von $[a,b]$. Es gilt

$$\begin{aligned} L_Z(\gamma) &= \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{t-1})| \leq \sum_{j=1}^{k-1} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| + |\gamma(c) - \gamma(t_{k-1})| \\ &+ |\gamma(t_k) - \gamma(c)| + \sum_{j=k+1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\ &= L_{Z_{a,c}}(\gamma_{a,c}) + L_{Z_{c,b}}(\gamma_{c,b}) \leq L(\gamma_{a,c}) + L(\gamma_{c,b})\,. \end{aligned}$$

Also ist $L(\gamma) < \infty$ und $L(\gamma) \leq L(\gamma_{a,c}) + L(\gamma_{c,b})$).

Definition 22.6 Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}^d$ heißt *stückweise* C^1 (oder ein *Pfad*), falls $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), ..., \gamma_d'(t))$ bis auf endlich viele $t \in [a,b]$ existiert und falls jede Komponente von γ' fortsetzbar zu einer stückweise stetigen Funktion auf $[a,b]$ ist (vgl. B./D. 13.7).

Im Falle von Pfaden ist es möglich, die Länge über ein geeignetes Integral auszudrücken.

Satz 22.7 *Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}^d$ ein Pfad. Dann ist γ rektifizierbar und es gilt*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'|\,.$$

Beweis. 1. Es sei $Z = \{t_0, ..., t_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt nach dem HDI, Teil 2 (komponentenweise angewandt)

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \Big| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma' \Big| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'| \qquad (j = 1, ..., n)\,,$$

also

$$L_Z(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \le \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'| = \int_a^b |\gamma'| \,.$$

Da Z beliebig war, ist γ rektifizierbar, und es gilt jedenfalls

$$L(\gamma) \le \int_a^b |\gamma'| \,.$$

2. Es bleibt noch die Gleichheit zu zeigen. Dazu können wir nach B. 22.5 ohne Einschränkung annehmen, dass γ auf ganz $[a, b]$ stetig differenzierbar ist.
Wir definieren $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$s(t) := L(\gamma_{|[a,t]}) \qquad (t \in [a, b])$$

mit $L(\gamma_{|[a,a]}) := 0$ (sog. Weglängenfunktion).
Dann gilt mit B. 22.5 für $t \in [a, b)$, $h > 0$ (so, dass $t + h \le b$)

$$s(t + h) - s(t) = L(\gamma_{|[a,t+h]}) - L(\gamma_{|[a,t]}) = L(\gamma_{|[t,t+h]}) \,.$$

Folglich ist mit 1.

$$\frac{|\gamma(t + h) - \gamma(t)|}{h} \le \frac{1}{h} L(\gamma_{|[t,t+h]}) = \frac{s(t + h) - s(t)}{h} \le \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\gamma'| \,.$$

Für $h \to 0$ konvergieren die rechte und die linke Seite diese Ungleichung gegen $|\gamma'(t)|$ (beachte: Ist $F(t) := \int_a^t |\gamma'(s)| ds$, so ist nach dem HDI, Teil 1,

$$|\gamma'(t)| = F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t + h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\gamma'| \,.)$$

Also ist s rechtsseitig differenzierbar an der Stelle $t \in [a, b)$ mit

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = |\gamma'(t)| \,.$$

Entsprechend sieht man, dass s linksseitig differenzierbar an allen Stellen $t \in (a, b]$ ist mit

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = |\gamma'(t)| \,.$$

Also ist s differenzierbar auf $[a, b]$ mit $s' = |\gamma'|$. Wieder mit dem HDI, Teil 2, ergibt sich (beachte: $s' = |\gamma'|$ ist stetig)

$$L(\gamma) = s(b) - s(a) = \int_a^b s' = \int_a^b |\gamma'| \,.$$

□

Beispiel 22.8 Für $0 < \beta \leq \alpha$ sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha \cos t \\ \beta \sin t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Dann ist $\Gamma_{a,b} := \gamma([a, b])$ ein Ellipsenbogen bzw eine Ellipse. Es gilt

$$|\gamma'(t)|^2 = \alpha^2 \sin^2 t + \beta^2 \cos^2 t = \alpha^2 \left(1 - \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \cos^2 t\right) ,$$

also

$$L(\gamma_{|[a,b]}) = \alpha \int_a^b \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\, dt$$

mit $k := \sqrt{1 - \beta^2/\alpha^2}$ (sog. elliptisches Integral). Ist $\alpha = \beta$, so ist

$$L(\gamma_{|[a,b]}) = \alpha(b - a) .$$

Wir wenden uns zum Abschluss dieses Abschnittes noch einem Begriff zu, der zu den topologischen Grundbegriffen gezählt werden kann.

Definition 22.9 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. X heißt *unzusammenhängend*, falls offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit

   $$X = U \cup V,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset .$$

   Anderenfalls heist X *zusammenhängend*.

2. $M \subset X$ heißt *unzusammenhängend*, falls $(M, d_{|M\times M})$ unzusammenhängend ist (d. h. falls offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V, U \cap M \neq \emptyset, V \cap M \neq \emptyset, U \cap V \cap M = \emptyset$). Anderenfalls heißt M *zusammenhängend*.

Beispiel 22.10 Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und $M = [0, 1] \cup [2, 3]$. Dann gilt für die offenen Mengen $U = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), V = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$:

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset ,$$

also ist M unzusammenhängend.
Ist $M = \mathbb{Q}$, so gilt für die offenen Mengen $U = (-\infty, \sqrt{2}), V = (\sqrt{2}, \infty)$:

$$\mathbb{Q} \subset U \cup V, \quad U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset, \quad V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap \mathbb{Q} = \emptyset ,$$

also ist auch $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend.

Bemerkung 22.11 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Aus obiger Definition ergibt sich leicht ([Ü]):
1. Die einpunktigen Mengen sind zusammenhängend.
2. X ist unzusammenhängend genau dann, wenn eine Menge U mit $\emptyset \neq U \neq X$ existiert, die offen und abgeschlossen ist.
3. Sind M_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap_{\alpha \in M} M_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\bigcup_{\alpha \in M} M_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.

In $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ gilt

Satz 22.12 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (ggfs. einpunktiges oder leeres) Intervall ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < b < c$ und $a, c \in M, b \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, b), V := (b, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap M \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \emptyset\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
„$\Leftarrow$" Es sei M ein Intervall. Ist $x_0 \in M$, so gilt

$$M = \bigcup_{x \in M} I[x, x_0]\,.$$

Es reicht also nach B. 22.11.3 zu zeigen: Für alle $a \leq b$ ist $[a, b]$ zusammenhängend. Angenommen, nicht. Dann existieren in $([a, b], d_{|\cdot|})$ offene Mengen U und V mit

$$[a, b] = U \cup V, \quad U \neq \emptyset, \quad V \neq \emptyset, \quad U \cap V = \emptyset\,.$$

Folglich sind $U = [a, b] \setminus V$ und $V = [a, b] \setminus U$ auch abgeschlossen und damit gilt

$$\xi := \sup U \in U, \quad \eta := \sup V \in V\,.$$

Da U, V offen in $([a, b], d_{|\cdot|})$ sind, muss $\xi = \eta = b$ gelten. Dies widersprcht aber $U \cap V = \emptyset$. □

Der folgende Satz zeigt, dass der Zusammenhang einer Menge sich unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz 22.13 *Es seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume. Ist $M \subset X$ zusammenhängend und $f : M \to Y$ stetig, so ist auch $f(M) \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir können uns beim Beweis auf den Fall $M = X$ und $Y = f(M)$ beschränken.
Angenommen, Y ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen V_1, $V_2 \subset M$ mit

$$Y = V_1 \cup V_2 \quad V_1 \neq \emptyset,\ V_2 \neq \emptyset, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset\,.$$

Da $f : X \to Y$ stetig ist, sind

$$U_1 = f^{-1}(V_1) \qquad U_2 = f^{-1}(V_2)$$

offen (in (X, d)). Es gilt dafür

$$U_1 \neq \emptyset, \quad U_2 \neq \emptyset, \quad U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

und

$$U_1 \cup U_2 = f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}(Y) = X\,,$$

also ist X unzusammenhängend. Widerspruch! □

Als Konsequenz aus S. 22.12 und S. 22.13 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes (S. 8.13):

Satz 22.14 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$ zusammenhängend. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Beweis. Nach S. 22.13 ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, also ein Intervall nach S. 22.12. □

Definition 22.15 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Eine Menge $M \subset X$ heißt *Bogen-zusammenhängend*, falls zu allen Punkten $x, y \in X$ eine Kurve Γ existiert mit $x, y \in \Gamma$ und $\Gamma \subset M$.

2. Ist $(X, d) = (\mathbb{K}^d, d_{|\cdot|})$, so heißt $M \subset X$ *Polygon-zusammenhängend*, falls Γ in 1. als Polygonzug gewählt werden kann. (Dabei nennt man eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{K}^d$ einen *Polygonzug* (durch $x^{(0)}, \ldots, x^{(m)}$), falls $x^{(0)}, \ldots, x^{(m)} \in \mathbb{K}^d$ existieren mit $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{m} I[x^{(j-1)}, x^{(j)}]$.)

   Ist dies der Fall, so kann man stets $x = x^{(0)}$ und $y = x^{(m)}$ fordern. Wir sagen dann, dass Γ die Punkte x und y verbindet.

Offensichtlich ist jede Polygon-zusammenhängende Menge auch Bogen-zusammenhängend. Weiter gilt:

Satz 22.16 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $M \subset X$ Bogen-zusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend. Insbesondere haben wir damit in $\mathbb{K}^d$:*

Polygon-zusammenhängend $\Rightarrow$ Bogen-zusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend.

Beweis. Wir können uns wieder auf den Spezialfall $X = M$ beschränken.
Angenommen, X ist nicht zusammenhängend, d.h. es existieren $U, V \subset X$ offen (und abgeschlossen) mit

$$U \cup V = X, \qquad U \neq \emptyset, \qquad V \neq \emptyset, \qquad U \cap V = \emptyset\,.$$

Es sei $x \in U, y \in V$. Da X Bogen-zusammenhängend ist, existiert eine Kurve Γ in X mit $x, y \in \Gamma$. Es sei $\gamma : [a, b] \to X$ eine Parameterdarstellung von Γ. Wir betrachten

$$\begin{array}{l} A := \{t \in [a, b] : \gamma(t) \in U\} = \gamma^{-1}(U) \\ B := \{t \in [a, b] : \gamma(t) \in V\} = \gamma^{-1}(V) \end{array}\,.$$

Dann sind nach S. 9.19 A und B offen und abgeschlossen in $([a, b], d_{|\cdot|})$ (und nicht leer).

Da $([a, b], d_{|\cdot|})$ zusammenhängend ist, muss nach B. 22.11.2 damit $A = B = [a, b]$ sein.
Dann ist aber $\Gamma \subset U \cap V$. Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$! $\square$

Bemerkung 22.17 I.A. folgt aus „zusammenhängend“ nicht „Bogen-zusammenhängend“. So kann man etwa für die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$M = \left\{ \left(t, \sin \frac{1}{t}\right) : t \in (0, 1) \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

zeigen: M ist zusammenhängend, aber nicht Bogen-zusammenhängend (ohne Beweis).

Definition 22.18 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $G \subset X$ heißt *Gebiet*, falls G nichtleer, offen und zusammenhängend ist.

Im Falle von offen Mengen (in $\mathbb{K}^d$) fallen alle drei Zusammenhangsbegrifffe zusammen:

Satz 22.19 *Es sei $G \subset \mathbb{K}^d$ ein Gebiet. Dann ist G Polygon-zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $x^{(0)} \in G$ fest. Wir setzen

$$M := \{x \in G : \exists \,\text{Polygonzug}\ \Gamma \subset G \text{ der } x, x^{(0)} \text{ verbindet}\}$$

und zeigen: M ist offen und abgeschlossen im metrischen Raum $(G, d_{|\cdot|})$. Da $M \neq \emptyset$ ist, ist dann $M = G$ nach B. 22.11.2. und damit ist G Polygon-zusammenhängend.
Also: M ist offen, denn ist $x \in M$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset G$. Da man x und $x^{(0)}$ durch einen Polygonzug in G verbinden kann, gilt dies auch für $x^{(0)}$ und alle $y \in U_\delta(x)$. Also ist $U_\delta(x) \subset M$.
M ist auch abgeschlossen (in $(G, d_{|\cdot|})$), denn es sei $(y^{(n)})$ eine Folge in M mit $y^{(n)} \to y \in G$. Es sei wieder $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(y) \subset G$ gilt. Dann existiert ein n mit $y^{(n)} \in U_\delta(y)$. Da $x^{(0)}$ und $y^{(n)}$ durch einen Polygonzug in G verbunden werden können, gilt dies auch für $x^{(0)}$ und y. Also ist $y \in M$. □

Als eine Anwendung ergibt sich etwa:

Satz 22.20 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit*

$$Jf(x) = 0 \qquad (x \in G)\,.$$

Dann ist f konstant.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Sind $x, y \in G$, so gilt $f(x) = f(y)$.
Nach S. 22.19 existiert ein Polygonzug $\Gamma \subset G$ durch $x^{(0)} = x, \ldots, x^{(m)} = y$ und nach B. 17.2 existieren $\xi^{(j)} \in I(x^{(j-1)}, x^{(j)})$ so, dass

$$|f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)})| \leq ||Jf(\xi^{(j)})|| \cdot |x^{(j)} - x^{(j-1)}| = 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Folglich ist $f(x) = f(x^{(0)}) = \ldots = f(x^{(m)}) = f(y)$. □

23 Maße und Integrale

Integrale haben wir schon an verschiedenen Stellen kennen gelernt. Zum einen haben wir uns mit Integralen für Regelfunktionen, also gleichmäßigen Grenzwerten von Treppenfunktionen auf kompakten Intervallen $[a,b] \subset \mathbb{R}$, befasst. Weiter sind auch uneigentliche Integrale auf (halb-) offenen Intervallen studiert worden.
Wir werden im Folgenden eine wesentlich allgemeinere Integrationstheorie entwickeln. Dabei werden wir uns auf die eher analytischen Aspekte der Theorie konzentrieren und für Beweise an der einen oder anderen Stelle auf die Wahrscheinlichkeitstheorie verweisen.

Definition 23.1 Es sei Ω eine Menge. Ein Mengensystem $\mathscr{S} \subset \mathrm{Pot}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra* (auf Ω), falls gilt

(σ1): $\emptyset \in \mathscr{S}$

(σ1): Aus $A \in \mathscr{S}$ folgt $A^c = \Omega \backslash A \in \mathscr{S}$

(σ1): Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{S}$, so ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{S}$.

Das Paar $(\Omega, \mathscr{S})$ heißt dann ein *Messraum*.

Bemerkung 23.2 Ist $\mathscr{S}$ eine σ-Algebra auf Ω, so gilt auch ([Ü]):

- $\Omega \in \mathscr{S}$
- (A_n) Folge in $\mathscr{S} \Rightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{S}$
- $A, B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash B \in \mathscr{S}$

Beispiel 23.3 Ist (X,d) ein metrischer Raum, so setzen wir

$$\mathscr{O} := \mathscr{O}_X := \{U \subset X : U \text{ offen}\}\ .$$

Dann ist durch

$$\mathscr{B} := \mathscr{B}_X := \bigcap \{\mathscr{S} : \mathscr{S} \supset \mathscr{O}\ \sigma\text{-Algebra}\}$$

eine σ-Algebra auf X gegeben. $\mathscr{B}$ heißt *Borel σ-Algebra* auf X und die Mengen $A \in \mathscr{B}$ nennt man *Borelmengen*. Insbesondere sind neben den offenen und den abgeschlossenen Mengen auch alle abzählbaren Schnitte von offenen Mengen (sog. G_δ-Mengen) und alle abzählbaren Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen (sog. F_σ-Mengen) Borelmengen.
Ist speziell $(X,d) = (\mathbb{R}^m, d_{|\cdot|})$, so schreiben wir kurz $\mathscr{B}_m := \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$ und in Falle $m = 1$ noch kürzer $\mathscr{B} := \mathscr{B}_1$.

Definition 23.4 Es seien $(\Omega, \mathscr{S})$ ein Messraum und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : \Omega \to Y$ heißt $(\mathscr{S}, B_Y)$-*messbar* (oder kurz *messbar*), falls

$$f^{-1}(B) \in \mathscr{S} \qquad \text{für alle } B \in \mathscr{B}_Y.$$

Bemerkung 23.5 1. Gilt lediglich

$$f^{-1}(V) \in \mathscr{S} \qquad \text{für alle } V \in \mathscr{O}_Y,$$

so ist schon $f : \Omega \to Y$ messbar.
(Denn: Zunächst gilt: Ist $f : \Omega \to Y$ beliebig, so ist

$$\mathscr{T} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{S}\}$$

eine σ-Algebra ([Ü]). Nach Voraussetzung ist $\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{T}$, und damit ist nach Definition auch $\mathscr{B}_Y \subset \mathscr{T}$, d.h. f ist messbar.)
Genauso ist f schon dann messbar, wenn gilt

$$f^{-1}(B) \subset \mathscr{S} \qquad \text{für alle } B \subset Y \text{ abgeschlossen.}$$

(Denn: Ist $V \in \mathscr{O}_Y$, so ist $V^c =: B$ abgeschlossen. Also folgt mit $(\sigma 2)$:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathscr{S}.)$$

2. Ist (Z, e) ein metrischer Raum und ist $g : Y \to Z$ stetig, so ist g insbesondere $(\mathscr{B}_Y, \mathscr{B}_Z)$-messbar. (Denn: Nach S. 9.19 gilt $g^{-1}(W) \in \mathscr{O}_Y \subset \mathscr{B}_Y$ für alle $W \in \mathscr{O}_Z$.)
$(\mathscr{B}_Y, \mathscr{B}_Z)$-messbare Funktionen bezeichnet man auch als Borel-messbar. Man sieht sofort: Ist $f : \Omega \to Y$ messbar und $g : Y \to Z$ Borel-messbar, so ist auch $g \circ f : \Omega \to Z$ messbar. Damit ist insbesondere $g \circ f$ messbar, falls g stetig ist.

Wir hatten früher gesehen, dass sich für eine konvergente Folge stetiger Funktionen f_n die Stetigkeit i. A. nur dann auf die Grenzfunktion f überträgt, wenn die Konvergenz gleichmäßig ist. Der folgende Satz zeigt, dass sich Messbarkeit schon bei punktweiser Konvergenz auf die Grenzfunktion „vererbt".

Satz 23.6 *Es seien $(\Omega, \mathscr{S})$ ein Messraum und (Y, d) ein metrischer Raum. Ferner seien $f_n : \Omega \to Y$ messbar und so, dass*

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f(x)$$

für alle $x \in \Omega$ existiert (wir schreiben in dem Fall kurz $f_n \to f$). Dann ist $f : \Omega \to Y$ messbar.

Beweis. Es sei $B \subset Y$ abgeschlossen. Nach B. 23.5.1 genügt es, zu zeigen: $f^{-1}(B) \in \mathscr{S}$.
Zunächst ist $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathscr{S}$. Also können wir $B \neq \emptyset$ annehmen. Wir definieren $\delta : Y \to [0,\infty)$ durch

$$\delta(y) := \operatorname{dist}\big(y, B\big) \quad \big(:= \inf\{d(y,z) : z \in B\}\big) \quad (y \in Y).$$

Dann gilt (siehe Beweis zu S. 19.5)

$$B = \{y \in Y : \delta(y) = 0\}.$$

Außerdem ist δ stetig.
(Denn: Es seien $y_1, y_2 \in Y$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $z \in B$ mit

$$d(y_1, z) < \delta(y_1) + \varepsilon,$$

also

$$\delta(y_2) - \delta(y_1) < d(y_2, z) - d(y_1, z) + \varepsilon \leq d(y_2, y_1) + \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt

$$\delta(y_2) - \delta(y_1) \leq d(y_2, y_1).$$

Durch Vertauschung der Rollen von y_1 und y_2 ergibt sich analog

$$\delta(y_1) - \delta(y_2) \leq d(y_2, y_1).$$

Also ist insgesamt

$$|\delta(y_2) - \delta(y_1)| \leq d(y_2, y_1)$$

und damit δ (Lipschitz-)stetig.)
Damit erhalten wir für $x \in \Omega$:

$$f(x) \in B \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \delta\big(f_n(x)\big) = \delta\big(f(x)\big) = 0,$$

d.h.

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \Big\{x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \delta\big(f_n(x)\big) = 0\Big\} \\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \Big\{x \in \Omega : \delta\big(f_n(x)\big) < \frac{1}{k}\Big\} \\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \qquad \big(\delta \circ f_n\big)^{-1}\Big(\Big(-\infty, \frac{1}{k}\Big]\Big). \end{aligned}$$

Da δ stetig ist, ist $\delta \circ f_n$ messbar, also ist

$$(\delta \circ f_n)^{-1}\Big(\Big(-\infty, \frac{1}{k}\Big]\Big) \in \mathscr{S} \qquad (n, k \in \mathbb{N}).$$

Mit $(\sigma 3)$ ergibt sich $f^{-1}(B) \in \mathscr{S}$. □

Beispiel 23.7 Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f' Borel-messbar.
(Denn: Da f differenzierbar ist, ist auch

$$g_n := n(f(\cdot + 1/n) - f)$$

differenzierbar, also insbesondere stetig auf $\mathbb{R}$ und damit nach B. 23.5.2 Borel-messbar. Nach S. 23.6 ist auch $f' = \lim_{n\to\infty} g_n$ Borel-messbar.)
Man beachte, dass i. A. f' nicht stetig ist.
(Ist etwa

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases} ,$$

so ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases} ,$$

also f' nicht stetig an $x_0 = 0$.)

Bemerkung 23.8 1. Es sei $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist $\{(a,b) \in \mathbb{Q}^m \times \mathbb{Q}^m : [a,b] \subset V\}$ abzählbar und

$$V = \bigcup_{[a,b]\subset V,\, a,b\in\mathbb{Q}^m} [a,b] .$$

(Denn: Ist $x = (x_1, \dots, x_m) \in V$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset V$. Weiter existieren $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ mit

$$x_j - \varepsilon/(2\sqrt{m}) < a_j \le x_j \le b_j < \varepsilon/(2\sqrt{m}) .$$

Insbesondere ist dann $x \in [a,b] = \prod_{j=1}^{m} [a_j, b_j]$. Ist weiter $y \in [a,b]$ beliebig, so folgt

$$|x - y|^2 = \sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|^2 < \varepsilon^2$$

also $y \in U_\varepsilon(x)$. Folglich ist $x \in [a,b] \subset V$, d. h. x liegt in der rechten Seite. Die andere Inklusion ist klar nach Definition.)
Damit folgt: $f = (f_1, \dots, f_m)^T : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ist schon dann $(\mathscr{S}, \mathscr{B}_m)$-messbar, wenn für alle $[a,b] \subset \mathbb{R}^m$ gilt

$$f^{-1}([a,b]) \in \mathscr{S} .$$

(Denn: Ist $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, so gilt

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{[a,b]\subset V,\, a,b\in\mathbb{Q}^d} f^{-1}([a,b]) \in \mathscr{S} .$$

Nach B. 23.5.1. ist f messbar.)
2. Es sei $f = (f_1, \dots, f_m)^T : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Dann ist f $(\mathscr{S}, \mathscr{B}_m)$-messbar genau dann, wenn $f_1, \dots, f_m$ $(\mathscr{S}, \mathscr{B})$-messbar sind.
(Denn:
„ $\Rightarrow$ “ Es gilt für $j = 1, \dots, m$

$$f_j = p_j \circ f,$$

wobei $p_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die j-te Komponente bezeichnet. Da p_j stetig ist, ist f_j $(\mathscr{S}, \mathscr{B})$-messbar nach B. 23.5.2.
„ $\Leftarrow$ “: Ist $[a, b] = \prod_{j=1}^{m} [a_j, b_j]$, so gilt

$$f^{-1}([a, b]) = \bigcap_{j=1}^{m} f_j^{-1}([a_j, b_j]) \in \mathscr{S} \, .$$

Damit ist f nach 1. $(\mathscr{S}, \mathscr{B}_m)$-messbar.)
3. Als wichtige Folgerung aus 2. erhalten wir etwa: Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar, so sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ messbar.
(Denn: Es reicht, die Behauptung für reellwertige f, g zu beweisen (!). Die Abbildungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig. Außerdem ist $(f, g) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ messbar nach 2. Also sind nach B. 23.5.2. auch $f + g$ und $f \cdot g$ messbar.)
4. Für $m = 1$ gilt weiterhin: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist schon dann $(\mathscr{S}, \mathscr{B})$-messbar, wenn nur $f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathscr{S}$ für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt. (Man beachte: Für $a \le b$ ist

$$[a, b] = (-\infty, b] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, a - 1/n] \, .)$$

Definition 23.9 Ist $(\Omega, \mathscr{S})$ ein Messraum, so heißt eine Abbildung $\mu : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ *Maß* auf $\mathscr{S}$ (bzw. $(\Omega, \mathscr{S})$), falls

(M1): $\mu(\emptyset) = 0$

(M2): Ist (A_n) eine Folge paarweise disjunkter (kurz p. d.) Mengen in $\mathscr{S}$ (p. d. heißt $A_j \cap A_k = \emptyset$, für alle $k \neq j$), so gilt mit der Konvention $\infty + a := \infty$ für alle $a \in [0, \infty]$

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \, .$$

Das Tripel $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ heißt dann *Maßraum.*

Wir stellen einige wichtige Eigenschaften von Maßen zusammen.

Satz 23.10 *Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt:*

1. *μ ist endlich-additiv, d.h. sind $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{S}$ p. d., so gilt*
$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$
2. *Sind $A, B \in \mathscr{S}$ mit $A \subset B$, so gilt*
$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$$
(und damit insbesondere $\mu(A) \leq \mu(B)$).
3. *Ist (A_n) eine Folge in $\mathscr{S}$ mit $A_n \uparrow A$, so gilt*
$$\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$$
(„Stetigkeit von unten").

Beweis.

1. Wir setzen $A_j := \emptyset$ für $j > n$. Dann sind A_j $(j \in \mathbb{N})$ p. d. und damit
$$\mu\Big(\bigcup_{j=n}^{n} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$
2. Es gilt $B = A \cup (B \setminus A)$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, also ist nach 1.
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$
3. Ist $\mu(A_N) = \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so ist nach 2. auch
$$\mu(A_n) = \infty \ (n \geq N) \quad \text{und} \quad \mu(A) = \infty.$$
Es sei also $\mu(A_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir betrachten (mit $A_0 := \emptyset$)
$$B_n := A_n \setminus A_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$
Dann sind auch die B_n p. d., und es gilt ([Ü])
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$
Damit erhalten wir
$$\begin{aligned} \mu(A_n) \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} \big[\mu(A_j) - \mu(A_{j-1})\big] \overset{2.}{=} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &\longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \overset{(M.2)}{=} \mu(A). \end{aligned}$$

□

Beispiel 23.11 (unser „Held“)
Man kann zeigen (siehe Wahrscheinlichkeitstheorie): Es gibt genau ein Maß $\lambda = \lambda_d$ auf $\mathscr{B}_d$ (also auf den Borelmengen in $\mathbb{R}^d$) mit

$$\lambda\Big(\prod_{j=1}^{d}[a_j, b_j]\Big) = \prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j) \qquad \text{für alle } [a, b]\,.$$

Dieses Maß heißt *Lebesgue-Maß* (oder auch *Lebesgue-Borel-Maß*) auf $\mathscr{B}_d$.
Es gilt für $A \in \mathscr{B}_d$

1. $\lambda_d(A) = \inf\{\lambda_d(U) : U \supset A \text{ offen}\}$
2. $\lambda_d(A) = \sup\{\lambda_d(K) : K \subset A \text{ kompakt}\}$.

Wichtig für uns ist insbesondere das Verhalten des Lebesgue-Maßes unter affin-linearen Transformationen:
Ist $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $\det(C) \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^d$ und $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $T(x) = Cx + b$ für $x \in \mathbb{R}^d$, so gilt

$$\lambda_d(T(A)) = |\det(C)|\lambda_d(A) \qquad (A \in \mathscr{B}_d)\,.$$

(Man beachte dabei: da T^{-1} existiert und stetig ist, gilt $T(A) = (T^{-1})^{-1}(A) \in \mathscr{B}_d$.)
Insbesondere ergibt sich, dass das Lebesgue-Maß invariant unter affin-orthogonalen Transformationen (sog. Bewegungen) ist, d. h. ist $T(x) = Cx + b$ mit C orthogonal, so folgt $\lambda(T(A)) = \lambda(A)$. Wieder als Spezialfall (mit $C = E_d$) folgt die Translationsinvarianz, d. h. für alle $A \in \mathscr{B}_d$ haben A und $A + b := \{a + b : a \in A\}$ gleiches Lebesgue-Maß.
Schließlich gilt noch: Ist A ein affiner Teilraum der Dimension $< d$, so ist $\lambda_d(A) = 0$.

Wir wollen nun Integrale bzgl. Maßen definieren. Dafür betrachten wir, ähnich wie im Falle des Regelfunktionen-Integrals, zunächst wieder sehr einfache Funktionen.
Wir verwenden dabei folgende äußerst suggestive Kurzschreibweise: Sind Ω, Y beliebige Mengen, sind $f, g : \Omega \to Y$ und ist R eine Relation auf Y, so schreiben wir

$$\{fRg\} := \{x \in \Omega : f(x)Rg(x)\}.$$

Ist etwa $Y = \mathbb{R}$, so ist für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{f \leq \alpha\} = \{x \in \Omega : f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}\big((-\infty, \alpha]\big)$$

oder

$$\{f > g\} = \{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}$$

usw.
Außerdem schreiben auch kurz $\mu(fRg)$ statt $\mu(\{fRg\})$ (falls definert).

Definition 23.12 Es sei $(\Omega, \mathscr{S})$ ein Messraum.

1. Eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt *($\mathscr{S}$-)Elementarfunktion* (oder *($\mathscr{S}$-)einfach*), falls $\varphi(\Omega)$ endlich ist und falls $\{\varphi = \alpha\} \in \mathscr{S}$ für alle $\alpha \in \varphi(\Omega)$ gilt.
   Wir setzen
   $$E := E(\Omega, \mathscr{S}) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{K} : \varphi \text{ Elementarfunktion}\}$$
   und
   $$E_+ := E_+(\Omega, \mathscr{S}) := \{\varphi \in E : \varphi \geq 0 \,\text{auf}\, \Omega\}.$$

2. Ist μ ein Maß auf $\mathscr{S}$, so setzen wir ferner
   $$E(\mu) := E(\Omega, \mathscr{S}, \mu) := \{\varphi \in E : \mu(\varphi \neq 0) < \infty\}.$$

Beispiel 23.13 Es sei $(\Omega, \mathscr{S})$ ein Messraum. Ist $A \in \mathscr{S}$, so ist die Indikatorfunktion χ_A, definiert durch
$$\chi_A(x) := 1_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$
eine Elementarfunktion. Insbesondere sind damit im Falle $(\Omega, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ etwa $\chi_{[a,b)}, \chi_{\mathbb{Q}}, \ldots$ Elementarfunktionen.

Definition 23.14 Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir setzen für $\varphi \in E_+ \cup E(\mu)$ (mit der Konvention $\infty \cdot 0 := 0$, $\infty \cdot x := \infty$ für $x > 0$)
$$\int \varphi d\mu := \int \varphi(x) d\mu(x) := \sum_{\alpha \in \varphi(\Omega)} \mu(\varphi = \alpha) \cdot \alpha \quad \begin{cases} \in [0, \infty], & \text{falls } \varphi \in E_+ \\ \in \mathbb{K}, & \text{falls } \varphi \in E(\mu) \end{cases} .$$

Bemerkung 23.15 Man kann zeigen (nicht schwer, aber etwas umständlich, daher Verweis auf Wahrscheinlichkeitstheorie):

- Summen und Produkte von Elementarfunktionen sind wieder Elementarfunktionen.

- $E(\mu)$ ist ein linearer Raum, und für $\varphi, \psi \in E(\mu), a, b \in \mathbb{K}$ gilt
  $$\int (a\varphi + b\psi) d\mu = a \int \varphi d\mu + b \int \psi d\mu.$$
  Für $\varphi, \psi \in E_+$ und $a, b \geq 0$ ist $a\varphi + b\psi \in E_+$, und es gilt wieder
  $$\int (a\varphi + b\psi) d\mu = a \int \varphi d\mu + b \int \psi d\mu.$$

- Für alle $\varphi \in E_+ \cup E(\mu)$ ist
$$\left|\int \varphi d\mu\right| \leq \int |\varphi| d\mu$$
(mit $|\infty| := \infty$).

Beispiel 23.16 Ist $(\Omega, \mathscr{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$ und ist $\varphi = \chi_{[a,b]}$, so gilt
$$\int \varphi d\lambda = \lambda(\varphi = 1) \cdot 1 = \lambda\big([a,b]\big) = b - a,$$
also
$$\int \varphi\, d\lambda = \int_a^b 1\, dx.$$
Ist also allgemeiner für $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$
$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \chi_{[x_{j-1}, x_j]},$$
so gilt
$$\int \varphi\, d\lambda = \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}) = \int_a^b \varphi_{|[a,b]}(x)\, dx,$$
d.h. für Treppenfunktionen wie in Abschnitt 13 stimmt das dort definierte Integral mit dem Integral bzgl. des Lebesgue-Maßes überein.

Definition 23.17 Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir setzen
$$\begin{aligned} M &:= M(\Omega, \mathscr{S}) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ messbar}\} \\ M_+ &:= M_+(\Omega, \mathscr{S}) := \{f \in M : f \geq 0\} \end{aligned}$$
und für $f \in M_+$
$$\int f d\mu := \sup\Big\{\int \varphi d\mu : \varphi \in E_+,\ \varphi \leq f\Big\} \qquad \big(\in [0,\infty]\big).$$
Offensichtlich gilt für $f, g \in M_+$ mit $f \leq g$ auch
$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$
Außerdem gilt

Satz 23.18 *(monotone Konvergenz; Levi)*
Ist (f_n) eine Folge in M_+ mit $f_n \uparrow f$, so ist auch $f \in M_+$, und es gilt
$$\int f_n\, d\mu \uparrow \int f\, d\mu.$$

Beweis. Nach S.23.6 ist $f \in M_+$. Aus $f_n \uparrow f$ ergibt sich sofort

$$\int f_n d\mu \uparrow \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu =: c \in [0, \infty]$$

und $c \leq \int f d\mu$. Es bleibt lediglich $c \geq \int f d\mu$ zu zeigen. Dazu seien $\varphi \in E_+$ mit $\varphi \leq f$ und $\delta \in (0,1)$ gegeben. Wir setzen für $\alpha \in \varphi(\Omega)$

$$A_{n,\alpha} := \{\varphi = \alpha\} \cap \{f_n \geq \delta\alpha\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $A_{n,\alpha} \in \mathscr{S}$ und $A_{n,\alpha} \uparrow \{\varphi = \alpha\}$, also auf Grund der Stetigkeit von unten

$$\mu(A_{n,\alpha}) \uparrow \mu(\varphi = \alpha) \qquad (n \to \infty).$$

Mit $\psi_n := \sum\limits_{\alpha\in\Omega} \chi_{A_{n,\alpha}}$ folgt

$$\begin{aligned}\int \varphi\psi_n d\mu &= \sum_{\alpha\in\varphi(\Omega)} \int \varphi\chi_{A_{n,\alpha}} d\mu = \sum_{\alpha\in\varphi(\Omega)} \alpha \cdot \mu(A_{n,\alpha}) \\ &\longrightarrow \sum_{\alpha\in\varphi(\Omega)} \alpha\mu(\varphi = \alpha) = \int \varphi d\mu \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

und $\delta \cdot \varphi \cdot \psi_n \leq f_n$, also

$$\delta \cdot \int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\delta \cdot \varphi \cdot \psi_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = c.$$

Da $\delta < 1$ beliebig war, ist auch $\int \varphi d\mu \leq c$, und da $\varphi \in E_+$ mit $\varphi \leq f$ beliebig war, ist auch $\int f d\mu \leq c$. □

Bemerkung 23.19 Es sei stets $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum.
1. Mna kann zeigen (vgl. Wahrscheinlichkeitstheorie): Ist $f : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar, so existiert eine Folge (φ_n) in E mit $\varphi_n \to f$ und $|\varphi_n| \leq |f|$. Ist $f \in M_+$, so kann man dabei $0 \leq \varphi_n(x) \uparrow f(x)$ erreichen.
2. Es seien $f, g \in M_+$. Nach B. 23.15 existieren Folgen $(\varphi_n), (\psi_n)$ in E_+ mit $\varphi_n \uparrow f, \psi_n \uparrow g$. Damit gilt auch $\varphi_n + \psi_n \uparrow f + g$, also mit S. 23.18

$$\begin{aligned}\int (f+g) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n) d_\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\int \varphi_n d\mu + \int \psi_n d\mu \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \varphi d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

3. Es gilt folgendes sogenannte Lemma von Fatou:
Ist (f_n) eine beliebige Folge in M_+ so, dass $f := \liminf f_n$ existiert, so gilt $f \in M_+$ und

$$\int f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

(Denn: Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$g_n := \inf_{k \geq n} f_k.$$

Dann ist $g_n \in M_+$ ([Ü]), und es gilt $g_n \leq f_k$ für alle $k \geq n$, d.h.

$$\int g_n d\mu \leq \int f_k d\mu \qquad (k \geq n)$$

und damit auch

$$\int g_n d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k d\mu.$$

Außerdem gilt $g_n \uparrow \varliminf_{n\to\infty} f_n = f$, also ist nach S. 23.18 $f \in M_+$ mit

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int f_k = \varliminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.)$$

Definition 23.20 Es sei (f_n) eine Folge in M mit $f_n \to f$ und so, dass $|f_n| \leq g$ für ein $g \in M_+$ mit $\int g\, d\mu < \infty$. Dann sprechen wir von *(μ-)dominierter* Konvergenz und schreiben

$$f_n \to f \qquad \mu\text{-dominiert .}$$

Satz 23.21 *(dominierte Konvergenz; Lebesgue)*
Ist (f_n) eine Folge in M mit $f_n \to f$ μ-dominiert, so gilt

$$\int |f_n - f| d\mu \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Wir setzen $h_n := \frac{1}{2}|f_n - f|$. Dann ist $h_n \in M_+$. Aus $0 \leq g - h_n \leq g$ und $g - h_n \to g$ folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\int g d\mu \leq \varliminf \int (g - h_n) d\mu \leq \varlimsup \int (g - h_n) d\mu \leq \int g\, d\mu,$$

d.h.

$$\int (g - h_n) d\mu \to \int g d\mu \qquad (n \to \infty).$$

Außerdem ist nach B. 23.19.1

$$\int g d\mu = \int (g - h_n) d\mu + \int h_n d\mu,$$

also

$$\int h_n d\mu = \int g d\mu - \int (g - h_n) d\mu \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

□

Damit kommen wir schließlich zur Definition des Integrales für allgemeine $\mathbb{K}$-wertige Funktionen.

Bemerkung und Definition 23.22 Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir sagen, $f \in M$ sei *μ-integrierbar*, falls

$$\int |f| \, d\mu < \infty \,,$$

Ferner setzen wir

$$M(\mu) := M(\Omega, \mathscr{S}, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : |f| \ \mu \text{ -integrierbar}\}$$

und für $f \in M(\mu)$

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu,$$

wobei (φ_n) eine beliebige Folge in $E(\mu)$ mit $\varphi_n \to f$ μ-dominiert.
Man beachte dabei: Nach B. 23.15 existiert eine solche Folge (φ_n) (man beachte: $g := |f|$ ist eine geeignete dominierende Funktion).
Außerdem gilt für eine beliebige Folge (φ) in $E(\mu)$ mit $\varphi \to f$ und $|\varphi_n| \leq g$, wobei $\int g \, d\mu < \infty$,

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi_n d\mu - \int \varphi_m d\mu \right| &= \left| \int (\varphi_n - \varphi_m) d\mu \right| \leq \int |\varphi_n - \varphi_m| d\mu \\ &\leq \int |\varphi_n - f| d\mu + \int |\varphi_m - f| d\mu. \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$\int |\varphi_n - f| d\mu \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

und damit ist $(\int \varphi_n d\mu)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, also konvergent. Ist schließlich (ψ_n) eine weitere Folge in $E(\mu)$ mit $\psi_n \to f, |\psi_n| \leq |f|$, so gilt entsprechend

$$\left| \int \varphi_n d\mu - \int \psi_n d\mu \right| \leq \int |\varphi_n - f| d\mu + \int |\psi_n - f| d\mu \to 0,$$

d.h. die Definition ist unabhängig von der Wahl der Folge (φ_n).
Außerdem kann im Falle $f \geq 0$ (d.h. $f \in M_+$) die Folge (φ_n) so gewählt werden, dass $0 \leq \varphi_n \uparrow f$. Also stimmen die alte und die neue Definition für $f \in M_+$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz überein.

Bemerkung 23.23 Durch Übertragung der entsprechenden Eigenschaften für Elementarfunktionen erhält man leicht:

- Für alle $f, g \in M(\mu)$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

$$\int (af + bf) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

- Für alle $f \in M(\mu)$ ist
$$\Big|\int f d\mu\Big| \leq \int |f| d\mu.$$

Bemerkung und Definition 23.24 Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum, und es sei $D \in \mathscr{S}$. Wir setzen

$$\mathscr{S} \cap D := \{A \cap D : A \in \mathscr{S}\} \quad (= \{A \in \mathscr{S} : A \subset D\})$$

und

$$\mu_D := \mu_{|\mathscr{S}\cap D}.$$

Dann ist $\mathscr{S} \cap D$ eine σ-Algebra auf D (die sog. Spur-σ-Algebra bzgl. D) und μ_D ein Maß auf $\mathscr{S} \cap D$, d.h. $(D, \mathscr{S} \cap D, \mu_D)$ ist ein Maßraum.
Ist speziell (X, d) ein metrischer Raum und ist $D \in \mathscr{B}_X$, so ist

$$\mathscr{B}_D = \mathscr{B}_X \cap D,$$

wobei $\mathscr{B}_D$ die Borel-σ-Algebra in $(D, d_{|D\times D})$ bezeichnet ([Ü]).
Wir setzen für $f \in M_+(D, \mathscr{S} \cap D) \cup M(D, \mathscr{S} \cap D, \mu_D)$

$$\int_D f\, d\mu := \int f\, d\mu_D\ .$$

Damit erhalten wir: Ist $f \in M(\Omega, \mathscr{S})$, so ist $f_{|D} \in M(D, \mathscr{S} \cap D)$, und für $f \in M_+ \cup M(\mu)$ gilt
$$\int f\chi_D\, d\mu = \int_D f_{|D}\, d\mu.$$

(Denn: Für $f = \chi_A$, wobei $A \in \mathscr{S}$, gilt

$$\int \chi_A \chi_D d\mu = \int \chi_{A\cap D} d\mu = \mu(A \cap D) = \mu_D(A \cap D) = \int_D \chi_{A|D} d\mu.$$

Also gilt die Behauptung für Indikatorfunktionen. Aus Linearitätsgründen gilt sie damit auch für $\varphi \in E_+ \cup E(\mu)$ und durch Grenzübergang unter Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz bzw. des Satzes von der dominierten Konvergenz auch für $f \in M_+ \cup M(\mu)$.
Diese Schlussweise von Indikatorfunktionen über Elementarfunktionen hin zu beliebigen Funktionen in $M_+ \cup M(\mu)$ heißt *Standardschluss*.)
Wir schreiben im Weiteren dann auch kurz $\int_D f\, d\mu$ statt $\int f\chi_D\, d\mu$.

Beispiel 23.25 Es sei $f \in R[a, b]$ für ein Intervall $[a, b]$. Dann existiert eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a, b]$. Insbesondere gilt dann $\varphi_n \in E(\lambda_{[a,b]})$ und $|\varphi_n| \leq ||f||_\infty + 1$ für n genügend groß. Da $\lambda\big([a,b]\big) < \infty$ gilt, folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\int\limits_{[a,b]} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int\limits_{[a,b]} \varphi_n d\lambda}_{=\int_a^b \varphi_n(x)\,dx} = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

d.h. Lebesgueintegral und Regelfunktionenintegral stimmen überein.

Darüber hinaus erhalten wir auch ([Ü]): Ist $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ mit $f \in R[a,B]$ für alle $a < B < b$ so, dass $\int\limits_a^{b-} |f|$ existiert, so ist $f \in M(\lambda_{[a,b)})$ und es gilt

$$\int\limits_a^{b-} f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b)} f\,d\lambda\ .$$

24 Transformation von Maßen

Bemerkung und Definition 24.1 Es seien $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum, (Y, d) ein metrischer Raum und $T : \Omega \to Y$ messbar. Dann ist durch

$$\mu^T(B) := \mu\big(T^{-1}(B)\big) \qquad (B \in \mathscr{B}_Y)$$

ein Maß auf $\mathscr{B}_Y$ gegeben. Dieses Maß heißt *Bildmaß* von μ unter T.
(Denn: $\mu^T(\emptyset) = \mu\big(T^{-1}(\emptyset)\big) = \mu(\emptyset) = 0$, also ist (M1) erfüllt. Ist (B_n) eine Folge p. d. Mengen in $\mathscr{B}_Y$, so sind auch $T^{-1}(B_n) \in \mathscr{S}$ p. d. (da $T^{-1}(B_n) \cap T^{-1}(B_m) = T^{-1}(B_n \cap B_m)\big)$). Also folgt

$$\begin{aligned} \mu^T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) &= \mu\Big(T^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(B_n)\Big) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(T^{-1}(B_n)\big) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^T(B_n).) \end{aligned}$$

Man kann mit Standardschluss leicht zeigen:
Es ist $f \in M_+(Y, \mathscr{B}_Y) \cup M(Y, \mathscr{B}_Y, \mu^T)$ genau dann, wenn $f \circ T \in M_+(\Omega, \mathscr{S}) \cup M(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ und in diesem Falle gilt folgende *Transformationsformel*

$$\int f \, d\mu^T = \int f \circ T \, d\mu \, .$$

Beispiel 24.2 1. Ist λ das Lebesgue-Maß auf $\mathscr{B}_d$ und ist $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, T(x) = Cx + b$ mit $\det(C) \neq 0$ (vgl. B.23.11), so gilt

$$\lambda^{T^{-1}}(A) = \lambda\big(T(A)\big) = |\det C| \cdot \lambda(A)$$

d.h.

$$\lambda^{T^{-1}} = |\det C| \cdot \lambda \, .$$

bzw.

$$\lambda = \lambda^{T \circ T^{-1}} = (\lambda^{T^{-1}})^T = (|\det C| \cdot \lambda)^T .$$

2. Es sei $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $T : [0, 2\pi] \to S$ mit $T(x) = e^{ix}$. Dann ist durch

$$m := \frac{1}{2\pi} \lambda^T_{[0,2\pi]}$$

ein Maß auf $\mathscr{B}_S$ gegeben. Dabei gilt für $n \in \mathbb{Z}$ mit obiger Transformationsformel

$$\int z^n dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi]} (e^{ix})^n d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ \dfrac{1}{2\pi i n} e^{inx}\big|_0^{2\pi} = 0, & \text{falls } n \neq 0 \end{cases} .$$

Bemerkung und Definition 24.3 Es seien $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum und $h \in M_+(\Omega, \mathscr{S})$. Dann ist durch

$$\nu(A) := \int_A h d\mu \quad (A \in \mathscr{S})$$

ein Maß auf $\mathscr{S}$ defininiert. Wir schreiben dafür $h \cdot \mu$ und nennen h *Dichte* von ν bzgl. μ.
(Denn: Es gilt

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset h d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Ist (A_n) eine Folge p. d. Mengen in $\mathscr{S}$, so gilt

$$\sum_{j=1}^n h \cdot \chi_{A_j} = h \cdot \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} = h \cdot \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^n A_j} \uparrow h \cdot \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j},$$

also mit monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned} \nu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) &= \int h\chi_{\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j} d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int h\chi_{A_j} d\mu = \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int h\chi_{A_j} d\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).) \end{aligned}$$

Wieder kann man durch Standardschluss zeigen: Es ist $f \in M(h\cdot\mu)$ genau dann, wenn $f \cdot h \in M(\mu)$ und in diesem Falle sowie im Falle $f \in M_+$ gilt:

$$\int f\, d(h \cdot \mu) = \int fh\, d\mu\,.$$

Beispiel 24.4 Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann ist $h \cdot \lambda$ ein Maß auf $\mathscr{B}$, und es gilt

$$(h\lambda)(\mathbb{R}) = \int h d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx = 1,$$

d.h. die „Gesamtmasse“ ist 1. Das Maß $h \cdot \lambda$ heißt *Standard-Normalverteilung.*

Bemerkung und Definition 24.5 Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen, und es sei $T : U \to V$ bijektiv mit $T \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ und $\det JT(x) \neq 0$ $(x \in U)$. Dann ist nach dem Hauptsatz über Umkehrfunktionen (S. 17.3) auch $T^{-1} : V \to U$ in $C^1(V, \mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$(JT)^{-1} = J(T^{-1}) \circ T\,.$$

Eine Abbildung $T : U \to V$ mit diesen Eigenschaften nennt man einen *Diffeomorphismus* von U nach V.

Satz 24.6 *(Substitutionsregel)*
Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen, und es sei $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt

1. $\lambda_V = (|\det JT| \cdot \lambda_U)^T$,
2. *Ist $f : V \to \mathbb{K}$ messbar, so ist $f \in M(\lambda_V)$ genau dann, wenn $(f \circ T)\,|\det JT| \in M(\lambda_U)$, und in diesem Falle gilt*

$$\int_V f\,d\lambda = \int_U (f \circ T)\,|\det JT|\,d\lambda\,.$$

Beweis.
Für $\xi = (\xi_1, ..., \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha > 0$ sei

$$Q := Q_{\xi,\alpha} := (\xi_1 - \alpha/\sqrt{d}, \xi_1 + \alpha/\sqrt{d}] \times \ldots \times (\xi_d - \alpha/\sqrt{d}, \xi_d + \alpha/\sqrt{d}]$$

der „(halboffene) Würfel mit Zentrum ξ und Durchmesser 2α“. Ferner setzen wir für $\xi \in U$

$$T_\xi(x) := T(\xi) + JT(\xi)(x - \xi) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)\,.$$

1. Wir zeigen: Für alle kompakte Teilmengen L von U und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(L, \varepsilon) > 0$ so, dass für jeden Würfel $Q = Q_{\xi,\alpha}$ mit Zentrum $\xi \in L$ und Durchmesser $< 2\delta$ (d.h. $\alpha < \delta$) gilt: $Q \subset U$ und

$$T(Q) \subset T_\xi(Q_{\xi,(1+\varepsilon)\alpha})\,.$$

Beweis dazu: Es seien $L \subset U$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Da $(JT)^{-1} = JT^{-1} \circ T$ stetig auf U ist, existiert

$$M := \max_{\xi \in L} \|\,(JT(\xi))^{-1}\,\|\ .$$

Wir setzen für $\rho > 0$

$$U_\rho(L) := \bigcup_{\xi \in L} U_\rho(\xi)\ .$$

Dann ist $U_\rho(L)$ offen und beschränkt, und es gilt für $\rho > 0$ genügend klein

$$\overline{U_\rho(L)} \subset U$$

(da $\operatorname{dist}(L, U^c) > 0$; vgl. Beweis zu S. 19.5). Da JT stetig auf U, also gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $\overline{U_\rho(L)}$ ist, existiert ein $\delta \in (0, \rho)$ so, dass

$$||JT(\tau) - JT(\xi)|| < \frac{\varepsilon}{M\sqrt{d}}$$

für alle $\xi \in L, \tau \in U_\delta(\xi)$.

Nach B. 17.2 existiert für alle $\xi \in L$ und $x \in U_\delta(\xi)$ ein $\tau \in U_\delta(\xi) \subset \overline{U_\rho(L)}$ mit

$$\begin{aligned} |T(x) - T_\xi(x)| &= |(T - T_\xi)(x) - (T - T_\xi)(\xi)| \\ &\leq ||J(T - T_\xi)(\tau)|| \cdot |x - \xi| \\ &= ||JT(\tau) - JT(\xi)|| \cdot |x - \xi| \leq \frac{\varepsilon}{M\sqrt{d}}|x - \xi| \,. \end{aligned}$$

Da $T_\xi^{-1}y - T_\xi^{-1}z = (JT(\xi))^{-1}(y - z)$ für alle $\xi \in U$ und $y, z \in \mathbb{R}^d$ gilt, folgt hieraus für alle $\xi \in L$ und $x \in U_\delta(\xi)$

$$|T_\xi^{-1}(T(x)) - x| = |T_\xi^{-1}(T(x)) - T_\xi^{-1}(T_\xi(x))| \leq M|T(x) - T_\xi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}|x - \xi| \,.$$

Ist also $x \in Q = Q_{\xi,\alpha}$ mit $\alpha < \delta$, so ist $|x - \xi| \leq \alpha < \delta$ und damit

$$|T_\xi^{-1}(T(x)) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\alpha \,.$$

Folglich ist

$$T_\xi^{-1}T(x) \in Q_{\xi,(1+\varepsilon)\alpha}$$

bzw.

$$T(x) \in T_\xi(Q_{\xi,(1+\varepsilon)\alpha}) \,.$$

2. Wir setzen $h := |\det JT|$ und zeigen:

$$\lambda_V \leq (h \cdot \lambda_U)^T \,.$$

Zunächst genügt es dazu,

$$\lambda(B) \leq (h\lambda_U)^T(B)$$

für alle $B \subset V$ kompakt zu beweisen (denn dann ist für $A \in \mathscr{B}_V$ und $B \subset A$ kompakt auch

$$\lambda(B) \leq (h\lambda_U)^T(A)$$

und damit nach B. 23.11

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(B) : B \subset A \,\text{kompakt}\} \leq (h\lambda_U)^T(A)).$$

Weiter ist $B \subset V$ kompakt genau dann, wenn $K = T^{-1}(B) \subset U$ kompakt ist. Also ist zu zeigen: Für alle $K \subset U$ kompakt ist

$$\lambda(T(K)) \leq (h \cdot \lambda_U)(K).$$

Beweis dazu: Es sei $K \subset U$ kompakt . Ist U_0 offen und beschränkt mit

$$K \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U,$$

so existiert, da h stetig auf U,

$$c = \max_{\overline{U_0}} h(x)$$

Für alle $N \in \mathscr{B}_{U_0}$ ergibt sich dann

$$(h\lambda_U)(N) = \int_N h\, d\lambda \le c\lambda(N).$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Ist $\rho = \rho_\varepsilon > 0$ so klein, dass $L := \overline{U_\rho(K)} \subset U_0$ und $\lambda(L \backslash K) < \varepsilon$ (existiert nach B. 23.11), so folgt

$$\begin{aligned}(h\lambda_U)(L) &= (h\lambda_U)(K) + (h\lambda_U)(L\backslash K) \\ &\le (h\lambda_U)(K) + c \cdot \lambda(L\backslash K) \le (h\lambda_U)(K) + c\varepsilon.\end{aligned}$$

Da h stetig auf der kompakten Menge L ist, ist h gleichmäßig stetig auf L. Also existiert ein $\delta = \delta_\varepsilon \in (0, \delta(L, \varepsilon))$ (wobei $\delta(L, \varepsilon)$ wie in 1.) mit

$$h(\xi) < h(x) + \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad x, \xi \in L,\ |x - \xi| < \delta\,.$$

Dabei sei weiterhin $\delta \le \rho/2$ (dann ist jeder Würfel mit Durchmesser $< 2\delta$, der K schneidet, in L enthalten).
Durch Überdecken von K mit einem Gitter aus (halboffenen) Würfeln mit Durchmesser 2α, wobei $\alpha < \delta$, sieht man, dass endlich viele Würfel $Q_m = Q_{\xi_m,\alpha}$ $(m = 1, \ldots, N)$ mit folgenden Eigenschaften existieren:

(i) $K \subset \bigcup_{m=1}^{N} Q_m \subset L$,

(ii) Q_m sind paarweise disjunkt (hierfür haben wir „halboffene" Würfel gewählt).

Damit folgt

$$\begin{aligned}\lambda(T(K)) &\overset{\text{(i)}}{\le} \lambda\Big(T\big(\bigcup_{m=1}^{N} Q_m\big)\Big) \overset{\text{(ii)}, T \text{ bijekiv}}{=} \sum_{m=1}^{N} \lambda(T(Q_m)) \\ &\overset{1.}{\le} \sum_{m=1}^{N} \lambda(T_{\xi_m}(Q_{\xi_m,(1+\varepsilon)\alpha})) \\ &\overset{B.23.11}{=} \sum_{m=1}^{N} h(\xi_m)\lambda(Q_{\xi_m,(1+\varepsilon)\alpha}) \\ &= (1+\varepsilon)^d \sum_{m=1}^{N} h(\xi_m)\lambda(Q_m) \\ &\le (1+\varepsilon)^d \sum_{m=1}^{N} \big((h+\varepsilon)\cdot\lambda_U\big)(Q_m) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} (1+\varepsilon)^d \big((h+\varepsilon)\cdot\lambda_U\big)\big(\bigcup_1^N Q_m\big) \\ &\le (1+\varepsilon)^d \big((h\cdot\lambda_U)(L) + \varepsilon\lambda(U_0)\big) \\ &\le (1+\varepsilon)^d \big((h\cdot\lambda_U)(K) + \varepsilon(\lambda(U_0) + c)\big)\,.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\lambda(T(K)) \leq (h \cdot \lambda_U)(K)$.
3. Wendet man 2. mit T^{-1} statt T an, so ergibt sich

$$\lambda_U \leq (|\det JT^{-1}| \cdot \lambda_V)^{T^{-1}}$$

bzw.

$$\lambda_U^T \leq |\det JT^{-1}| \cdot \lambda_V$$

und damit auch

$$\frac{1}{|\det JT^{-1}|} \cdot \lambda_U^T \leq \lambda_V \, .$$

Weiter ist ([Ü])

$$\frac{1}{|\det JT^{-1}|} \cdot \lambda_U^T = \left(\frac{1}{|\det JT^{-1}|} \circ T \cdot \lambda_U \right)^T$$

und nach der Umkehrregel ist $(1/|\det JT^{-1}|) \circ T = (1/|\det \underbrace{JT^{-1} \circ T}_{=(JT)^{-1}})| = h$. Also folgt

$$(h\lambda_U)^T \leq \lambda_V.$$

Mit 2. ergibt sich der erste Teil des Satzes.
4. Die zweite Teil ergibt sich unmittelbar aus dem ersten unter Verwendung der Transformationsformel und der Formel für die Integration bzgl. Maßen mit Dichten aus B./D. 24.3. □

Bemerkung 24.7 Um die Substitutionsregel nutzen zu können, brauchen wir noch ein zweites wichtiges Resultat der mehrdimensionalen Integrationstheorie, den folgenden *Satz von Fubini*, für dessen Beweis wieder auf die Wahrscheinlichkeitstheorie verweisen:
Es seien $A \in \mathscr{B}_d$ und $B \in \mathscr{B}_m$. Ferner sei $f \in M(\lambda_{A\times B})$.
Dann existiert eine Menge $N \in \mathscr{B}_B$ mit $\lambda_m(N) = 0$ und so, dass

$$x \longmapsto f(x, y)$$

für alle $y \in B \setminus N$ λ_A-integrierbar ist. Außerdem gilt dann

$$\int\limits_{A\times B} f \, d\lambda_{d+m} = \int\limits_B \int\limits_A f(x, y) \, d\lambda_d(x) d\lambda_m(y)$$

(wobei wir für $y \in N$ etwa $\int_A f(x, y) \, d\lambda_d(x) := 0$ setzen). Entsprechend existiert eine Menge $M \in \mathscr{B}_A$ mit $\lambda_d(M) = 0$ und so, dass

$$y \longmapsto f(x, y)$$

für alle $x \in A \setminus M$ λ_B-integrierbar ist, und dass gilt

$$\int\limits_{A\times B} f\, d\lambda_{d+m} = \int\limits_A \int\limits_B f(x,y)\, d\lambda_m(y) d\lambda_d(x)$$

(wobei $\int_B f(x,y) d\lambda_m(y) := 0$ für $x \in M$).

In Anwendungen der Substitutionsregel treten Transformationen mit Polarkoordinaten besonders häufig auf.

Beispiel 24.8 (ebene Polarkoordinaten, vgl. B. 17.4).
Wir betrachten die Funktion $T : U \to V$, definiert durch

$$T(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad ((r,\varphi) \in U)\,,$$

wobei $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty,0] \times \{0\})$.
Dann ist $T : U \to V$ bijektiv und $T \in C^1(U)$ mit

$$\det JT(r,\varphi) = r > 0$$

(siehe B. 17.4). Also erhalten wir mit S. 24.6 für alle messbaren $f : V \to \mathbb{K}$:
f ist genau dann λ_V-integrierbar, wenn $(r,\varphi) \mapsto rf(T(r,\varphi))$ λ_U-integrierbar ist, und dann gilt

$$\int\limits_V f(x,y) d\lambda_2(x,y) = \int\limits_U f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\lambda_2(r,\varphi)\,.$$

Mt dem Satz von Fubini folgt weiter

$$\int\limits_V f d\lambda_2 = \int\limits_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\lambda_2(r,\varphi) = \int\limits_{(-\pi,\pi)} \int\limits_{(0,\infty)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr d\varphi\,.$$

Ist speziell $f = \chi_{U_R(0)}$, so gilt

$$f(T(r,\varphi)) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad 0 \le r < R \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \,,$$

also (beachte: $\lambda_2(V^c) = 0$ nach B. 23.11)

$$\lambda_2(U_R(0)) = \lambda_2(U_R(0) \cap V) = \int\limits_V \chi_{U_r(0)}\, d\lambda_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^R r dr d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^R d\varphi = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2\,.$$

Für Mengen $M \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$M = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : 0 \le r < \rho(\varphi),\ \varphi \in (-\pi,\pi)\}\,,$$

mit einer (messbaren) Funktion $\rho : (-\pi, \pi) \to [0, \infty)$ ergibt sich allgemeiner

$$\lambda_2(M) = \lambda_2(M \cap V) = \int_V \chi_M d\lambda_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\rho(\varphi)} r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

(ist etwa $M = S_{\alpha,\beta} = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : \alpha \le \varphi \le \beta\}$ ein Kreissektor, so ist

$$\rho(\varphi) = \begin{cases} 1, & \alpha \le \varphi \le \beta \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

also

$$\lambda_2(S_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta d\varphi = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\,.)$$

Beispiel 24.9 (Sphärische Polarkoordinaten)
Wir betrachten die Abbildung $T : U \to V$ mit

$$T(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad ((r, \varphi, \vartheta) \in U)\,,$$

wobei

$$U = (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$$

und

$$V = T(U) = \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R})\,.$$

Man kann dafür zeigen ([Ü]): Es ist $T \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ und $T : U \to V$ bijektiv mit

$$|\det JT(r, \varphi, \vartheta)| = r^2 \cos\vartheta \qquad ((r, \varphi, \vartheta) \in U)$$

(Entwicklung nach der letzten Zeile). Also erhalten wir mit S. 24.6: Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ messbar, so ist f genau dann λ_V-integrierbar, wenn

$$(r, \varphi, \vartheta) \longmapsto f(T(r, \varphi, \vartheta)) r^2 \cos\vartheta$$

λ_U-integrierbar ist, und dann gilt

$$\int_V f d\lambda_3 = \int_U f(T(r, \varphi, \vartheta))\, r^2 \cos\vartheta \, d\lambda_3(r, \varphi, \vartheta)\,.$$

Mit dem Satz von Fubini ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \int_V f\, d\lambda_3 &= \int_{(0,\infty)\times(-\pi,,\pi)\times(-\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})} f(T(r, \varphi, \vartheta)\, r^2 \cos\vartheta \, d\lambda_3(r, \varphi, \vartheta) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty f(T(r, \varphi, \vartheta))\, r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

Ist etwa $f = 1_{U_R(0)}$ (in $\mathbb{R}^3$), so gilt

$$f(T(r,\varphi,\vartheta)) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad 0 \le r \le R \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad ,$$

also (da $\lambda_3(V^c) = 0$)

$$\begin{aligned} \lambda_3(U_R(0)) &= \lambda(U_R(0) \cap V) = \int_V f\, d\lambda_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cos\vartheta\, dr d\vartheta d\varphi = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta}_{=2}\, d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Manchmal lassen sich über den Umweg mehrdimensionaler Integration auch eindimensionale Integrale elegant berechnen. Wir betrachten auch hierzu ein Beispiel.

Beispiel 24.10 Die Beta-Funktion $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$B(p,q) := \int_{0^+}^{1^-} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \qquad (p, q > 0)$$

(man beachte: das uneigentliche Integral existiert). Substituiert man $t = \cos^2\varphi$, so folgt

$$B(p,q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\varphi) \sin^{2q-1}(\varphi) d\varphi.$$

Weiter gilt für $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty r^{2\alpha-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma(\alpha),$$

wobei Γ die Eulersche Gammafunktion bezeichnet. Also ist

$$\begin{aligned}
B(p,q)\Gamma(p+q) &= 2\int_0^\infty B(p,q) r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \\
&= 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} (r\cos\varphi)^{2p-1}(r\sin\varphi)^{2q-1} e^{-r^2} r\, d\varphi\, dr \\
&\overset{B.24.8}{=} 4 \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} x^{2p-1} y^{2p-1} e^{-x^2-y^2} d\lambda_2(x,y) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} 4\int_0^\infty x^{2p-1} e^{-x^2} d\lambda(x) \int_0^\infty y^{2p-1} e^{-y^2} d\lambda(y) \\
&= \Gamma(p)\Gamma(q)\ ,
\end{aligned}$$

d.h.

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

25 Holomorphe Funktionen und Cauchyscher Integralsatz

Die Funktionentheorie beschäftigt sich im Wesentlichen mit Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und f differenzierbar ist. Da man solche Funktionen auch als (komplexwertige) Funktionen zweier reeller Variablen auffassen kann, wollen wir zunächst kurz auf die Unterschiede zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit eingehen.

Bemerkung 25.1 Es sei $M \subset \mathbb{C}\,(=\mathbb{R}^2)$, und es sei $f : M \to \mathbb{C}$. Ist f (komplex) differenzierbar an der Stelle $z_0 \in M$ (gemäß D. 10.1) und existiert für ein $\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_\zeta f(z_0)$ (gemäß D. 15.3), so gilt

$$\partial_\zeta f(z_0) = f'(z_0) \cdot \zeta\,. \tag{25.1}$$

(Denn: Jeweils nach Definition gilt

$$\partial_\zeta f(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\zeta) - f(z_0)}{t} = \zeta \cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t\zeta) - f(z_0)}{\zeta t} = \zeta \cdot f'(z_0).)$$

Existieren insbesondere $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \partial_i f(z_0)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \partial_1 f(z_0)$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \tag{25.2}$$

oder mit anderen Worten

$$\operatorname{grad} f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}.$$

Ist $M \subset \mathbb{C}$ offen und ist f komplex differenzierbar an z_0, so gilt (25.1) für alle ζ und damit insbesondere (25.2).

Ist umgekehrt M offen, f reell differenzierbar an z_0 und gilt (25.2), so ist f auch komplex differenzierbar an z_0.

(Denn: Da f reell differenzierbar an z_0 ist, existiert eine Funktion $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(z) \to 0\,(z \to z_0)$ und so, dass

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z_0) + \operatorname{grad}^T f(z_0)\begin{pmatrix}x - x_0\\ y - y_0\end{pmatrix} + |z - z_0|\,\varepsilon(z_0)\\
&= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\cdot(1, i)\begin{pmatrix}x - x_0\\ y - y_0\end{pmatrix} + |z - z_0|\,\varepsilon(z)\\
&= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(z - z_0) + |z - z_0|\,\varepsilon(z).
\end{aligned}$$

Nach der Zerlegungsformel (S. 10.6) ist f (komplex) differenzierbar an z_0 mit $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.)

Definition 25.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *holomorph* in Ω, falls f' auf Ω existiert und stetig ist. Wir setzen

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph in } \Omega\} .$$

Satz 25.3 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent*

a) f ist holomorph in Ω.

b) $f \in C^1(\Omega)$, und es gilt (25.2) für alle $z_0 \in \Omega$.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b): Ist f holomorph in Ω, so ist f' stetig auf Ω und damit sind nach B. 25.1 auch die partiellen Ableitungen stetig auf Ω (und es gilt (25.2)).

b) $\Rightarrow$ a): Ist $f \in C^1(\Omega)$, so sind die partiellen Ableitungen stetig auf Ω. Nach S. 15.13 ist f insbesondere reell differenzierbar auf Ω. Nach B. 25.1 ist f komplex differenzierbar an z_0. Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig auf Ω ist, ist f holomorph. □

Beispiel 25.4 Es seien (a_ν) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist durch

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad |z - z_0| < R$$

eine holomorphe Funktion im Konvergenzkreis der Potenzreihe gegeben (denn nach S. 12.5 ist f sogar beliebig oft differenzierbar in $|z - z_0| < R$).
Insbesondere sind also Funktionen wie exp, sin, cos und alle Polynome holomorph in $\mathbb{C}$.

Ein wesentliches Ziel wird es sein, zu zeigen, dass jede holomorphe Funktion „lokal" als Potenzreihe gegeben und damit nach S. 12.5 insbesondere beliebig oft differenzierbar ist. Eine Art mathematisches Wunder!

Wir wenden uns zunächst der Frage nach der Existenz von Stammfunktionen zu. Vorbereitend dazu gibt es ein Ergebnis über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen.

Satz 25.5 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Ferner sei $f : U \times I \to \mathbb{C}$ so, dass*

1. *$f(z,\cdot)$ für alle $z \in U$ eine Regelfunktion ist,*

2. *$f(\cdot,t)$ für alle $t \in I$ differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times I \to \mathbb{C}$ mit $\frac{\partial f}{\partial z} := f'(\cdot,t)$ stetig ist.*

Dann ist $F : U \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(z) := \int_a^b f(z,t)\,dt \qquad (z \in U),$$

differenzierbar auf U mit

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,dt \qquad (z \in U).$$

Beweis. Es sei $z_0 \in U$ fest. Dann existiert ein $r > 0$ so, dass $M := \overline{U_r(z_0)}$ in U liegt. Wir setzen für $t \in I$

$$h_t(z) := f(z,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t) \cdot z \qquad (z \in U).$$

Dann ist h_t differenzierbar auf U mit

$$h_t'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t) \qquad (z \in U).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig auf $M \times I$ und ferner $M \times I$ kompakt ist, ist $\frac{\partial f}{\partial z}$ gleichmäßig stetig auf $M \times I$. Also existiert ein $\delta \in (0,r)$ so, dass

$$|h_t'(z)| < \varepsilon \qquad (|z - z_0| < \delta, t \in I).$$

Ist $z \in U$ mit $0 < |z - z_0| < \delta$, so ergibt sich mit $\zeta := \frac{z-z_0}{|z-z_0|}$ und $\rho := |z - z_0|$ für alle $t \in I$ nach dem HDI, Teil 2

$$h_t(z) - h_t(z_0) = \int_0^\rho \partial_\zeta h_t(z_0 + s\zeta)ds = \int_0^\rho h_t'(z_0 + s\zeta)ds \cdot \zeta.$$

Hieraus folgt für alle $t \in I$

$$|f(z,t) - f(z_0,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)(z - z_0)| =$$

$$= |h_t(z) - h_t(z_0)| \le \int_0^\rho \underbrace{|h_t'(z_0 + s\zeta)|}_{<\varepsilon}\, ds \le \varepsilon \cdot \rho = \varepsilon |z - z_0|,$$

also

$$
\begin{aligned}
&|F(z) - F(z_0) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t)\, dt \cdot (z - z_0)| \\
&\leq \int_a^b |f(z,t) - f(z_0, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t)(z - z_0)|\, dt \leq \varepsilon |z - z_0|(b - a)
\end{aligned}
$$

und damit

$$\Big| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) dt \Big| \leq \varepsilon(b - a).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung und Definition 25.6 Es sei $M \subset \mathbb{C}$. Dann heißt M *sternförmig*, falls ein $z_* \in G$ so existiert, dass für alle $z \in M$ die Strecke

$$I[z, z_*] = \{z_* + t(z - z_*) : t \in [0, 1]\}$$

in M liegt.
Offensichtlich ist jedes konvexe Menge auch sternförmig. Ein Beispiel einer nicht-konvexen, sternförmigen Menge ist etwa $M = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$.

Damit erhalten wir

Satz 25.7 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann existiert eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.*

Beweis. Es sei ohne Einschränkung $z_* = 0$. Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_0^1 z \cdot f(zt) dt \qquad (z \in G).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}(z f(zt)) = f(zt) + z f'(zt) t \qquad (z \in U,\ t \in [0, 1]).$$

Da f holomorph in G ist, ist die rechte Seite stetig auf $G \times [0, 1]$. Nach S. 25.5 ist F differenzierbar auf G mit

$$
\begin{aligned}
F'(z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}(z f(zt))\, dt = \int_0^1 f(zt)\, dt + \int_0^1 t \cdot z f'(zt)\, dt \\
&= \int_0^1 f(zt)\, dt + t \cdot f(zt)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(zt)\, dt = f(z).
\end{aligned}
$$

□

Als erste Anwendung wollen wir uns mit der Frage der Existenz von Logarithmen und allgemeinen Potenzen in $\mathbb{C}$ beschäftigen. Im ersten Teil der Analysis hatten wir die reelle Logarithmusfunktion als Umkehrung der (reellen) Exponentialfunktion definiert. Schon die Tatsache, dass die Exponentialfunktion im Komplexen nicht mehr injektiv ist, deutet an, dass die Situation hier komplizierter wird. Es gilt jedenfalls

Satz 25.8 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt*

1. *Ist G sternförmig mit $0 \notin G$, und ist ferner $z_0 \in G$ mit $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, so existiert eine Funktion $f \in H(G)$ mit $f(z_0) = \ln r_0 + i\varphi_0$ und*

$$e^{f(z)} = z \qquad \text{für alle } z \in G\,.$$

2. *Sind $f, \tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ stetig mit $e^{f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}$ für alle $z \in G$, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

Beweis. 1. Da $0 \notin G$ ist, ist $z \mapsto 1/z$ holomorph in G. Da G sternförmig ist, existiert nach S. 25.7 eine Funktion $f \in H(G)$ mit $f'(z) = 1/z$. Dabei kann f so gewählt werden, dass $f(z_0) = \ln r_0 + i\varphi_0$ gilt (ggfs. addiere man eine geeignete Konstante). Es folgt

$$(ze^{-f(z)})' = e^{-f(z)} + ze^{-f(z)}(-f'(z)) \equiv 0 \quad \text{in } G.$$

Also existiert eine Konstante c mit

$$z = ce^{f(z)} \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Aus $e^{f(z_0)} = z_0$ ergibt sich $c = 1$ und damit die Behauptung.
2. Sind $f, \tilde{f} \in C(G)$ mit $e^{\tilde{f}} = e^{f}$, so gilt

$$e^{\tilde{f}(z)-f(z)} = e^{\tilde{f}(z)}/e^{f(z)} \equiv 1 \text{ in } G.$$

Damit ist

$$\varphi(z) = \frac{\tilde{f}(z) - f(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

für alle $z \in G$. Da G zusammenhängend und φ stetig auf G ist, ist $\varphi(z) \equiv \text{const}$ auf G nach S. 22.14, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i \qquad (z \in G)\,.$$

□

Bemerkung und Definition 25.9 Es sei G ein Gebiet. Jede Funktion $f \in H(G)$ mit $e^{f(z)} = z$ in G heißt *Zweig des Logarithmus* in G. Ist f ein solcher Zweig, so ist auch $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(z) = f(z) + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ein Zweig. Nach S. 25.8.2 sind durch diese (abzählbar unendlich vielen) Funktionen alle Zweige gegeben. Außerdem zeigt S. 25.8.2 auch, dass im Falle der Existenz eine Zweiges jede stetige Funktion f mit $e^{f(z)} = z$ „automatisch" holomorph in G ist.

Beispiel 25.10 Es sei

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\,.$$

Dann ist $\mathbb{C}_-$ sternförmig. Nach S. 25.8.1 existiert eine in Funktion $f \in H(\mathbb{C}_-)$ mit

$$e^{f(z)} = z \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_-.$$

(also ein Zweig des Logarithmus) und $f(1) = 0$.
Ist $z \in \mathbb{C}_-$, so existieren eindeutig bestimmte $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ mit $z = re^{i\varphi}$. Die Abbildung $p : \mathbb{C}_- \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ mit

$$p(z) = (r, \varphi) \qquad (z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-)$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ (vgl. B.17.4). Damit ist auch $\tilde{f} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) = \ln r + i\varphi \qquad (z \in \mathbb{C}_-)$$

stetig. Weiter gilt natürlich auch

$$e^{\tilde{f}(z)} = e^{\ln r + i\varphi} = re^{i\varphi} = z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Da $\tilde{f}(1) = 0 = f(1)$ gilt, ist $f(z) \equiv \tilde{f}(z)$ in $\mathbb{C}_-$. Für $z = r > 0$ haben wir insbesondere $f(r) = \ln r$, d.h. dieser Zweig setzt den „reellen Logarithmus" ln holomorph auf $\mathbb{C}_-$ fort. Wir nennen f den Hauptzweig des Logarithmus (von z) in $\mathbb{C}_-$ und schreiben dafür auch

$$f(z) =: \log z \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Nach S. 25.8.2 sind alle weiteren Zweige von der Form

$$z \mapsto \log z + 2k\pi i = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Wie sieht es mit der Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)$$

für $z, w \in \mathbb{C}_-$ aus?

Ist $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\vartheta}$ mit $\varphi, \vartheta \in (-\pi, \pi)$ und $\varphi + \vartheta \in (-\pi, \pi)$, so ist $zw = r\varrho e^{i(\varphi+\vartheta)}$. Es gilt also

$$\log(zw) = \ln(r\varrho) + i(\varphi + \vartheta) = \ln r + i\varphi + \ln \varrho + i\vartheta = \log z + \log w\,.$$

Ist jedoch etwa $\varphi + \vartheta > \pi$, so ist $zw = r\varrho e^{i(\varphi+\vartheta-2\pi)}$, also

$$\log(zw) = \ln(r\varrho) + i(\varphi + \vartheta - 2\pi) = \log z + \log w - 2\pi i\,.$$

Es kommt also ein „Korrekturterm“ $2\pi i$ hinzu. Im Falle $\varphi + \vartheta = \pi$ ist $\log(zw)$ nicht einmal definiert.
Die Beispiele zeigen, dass Vorsicht im Umgang mit komplexen Logarithmen angebracht ist!

Wie im Reellen definieren wir allgemein Potenzen mit Hilfe von Logarithmen. Wir beschränken uns dabei auf Potenzen, die unter Verwendung des Hauptzweiges definiert sind.

Definition 25.11 Es sei $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, und es sei $b \in \mathbb{C}$. Wir setzen

$$z^b := e^{b\cdot\log z} \qquad (z \in \mathbb{C}_-)\,.$$

Ist speziell $b = 1/k$ für ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, so schreiben wir auch $\sqrt[k]{z}$ an Stelle von $z^{1/k}$, und ist $k = 2$, so schreiben wir kurz $\sqrt{z}$. Die Funktion $z \mapsto \sqrt[k]{z}$ heißt *Hauptzweig der k-ten Wurzel* (für $k = 2$ *Hauptzweig der Wurzel*) (von z) in $\mathbb{C}_-$. Für $z = r > 0$ stimmt diese Definition nach B. 25.10 mit der aus D. C.15 überein.
Andere Zweige der k-ten Wurzel erhält man durch Verwendung anderer Zweige des Logarithmus. Außerdem kann man allgemeine Potenzen auch in anderen Gebieten betrachten, in denen Logarithmen existieren.

Bemerkung 25.12 1. Für $z \in \mathbb{C}_-$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^{b_1+b_2} = z^{b_1} z^{b_2}\,.$$

Weiter ist $z \mapsto z^b$ holomorph in $\mathbb{C}_-$ mit

$$(z^b)' = b \cdot z^{b-1}\,.$$

2. Ist $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_-$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$, so gilt $\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r} e^{i\varphi/k}$ (und damit auch $(\sqrt[k]{z})^k = z$).

Wir beschäftigen uns nun mit dem Konzept komplexer Wegintegrale. Wir werden uns dabei auf Integrale längs Pfaden beschränken.

Definition 25.13 Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein Pfad (vgl. D. 22.6). Ferner sei $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ die Kurve mit Parameterdarstellung γ. Ist $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ stetig auf Γ, so ist $f \circ \gamma \cdot \gamma' \in R[\alpha, \beta]$. Wir definieren das *Integral von f längs γ* durch

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)dz := \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,.$$

Bemerkung 25.14 1. Es seien $[\alpha_1, \beta_1]$ und $[\alpha, \beta]$ Intervalle, und es sei $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar mit $\varphi' > 0$ und $\varphi(\alpha_1) = \alpha$, $\varphi(\beta_1) = \beta$. Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein Pfad, so ist auch $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$ ein Pfad (mit $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta]) = \gamma_1([\alpha_1, \beta_1])$, d.h. beide parametrisieren die selbe Kurve). Mit der Substitutionsregel gilt dann

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f \circ \gamma_1 \cdot \gamma_1' = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f \circ \gamma \circ \varphi \cdot \gamma' \circ \varphi \cdot \varphi' = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\gamma f\,.$$

Sind γ und $\tilde{\gamma}$ Pfade, für die eine solche Funktion φ existiert, so sagen wir γ und $\tilde{\gamma}$ seien *äquivalent*. Insbesondere zeigt obige Überlegung, dass zu jedem Pfad γ und zu jedem kompakten Intervall $[\sigma, \tau]$ ein zu γ äquivalenter Pfad $\tilde{\gamma} : [\sigma, \tau] \to \mathbb{C}$ existiert. Wir können also das Parameterintervall stets nach Wunsch wählen.

Man beachte jedoch: Ist γ wie oben und $\varphi(t) = \alpha + \beta - t\,(t \in [\alpha, \beta])$, so gilt für $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ (also $\gamma_1(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$)

$$\int_{\gamma_1} f = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma_1 \cdot \gamma_1' = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \circ \varphi \cdot \gamma' \circ \varphi \cdot \varphi' = \int_\beta^\alpha f \circ \gamma \cdot \gamma' = -\int_\gamma f\,.$$

Wir schreiben für den Weg γ_1 deshalb auch γ^-. Es gilt damit sehr suggestiv

$$\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f \qquad (f \in C(\Gamma))\,.$$

2. Eine einfache, aber oft sehr nützliche Abschätzung für das Integral von f längs γ ergibt sich (mit $\|f\|_{\Gamma,\infty} = \sup\limits_{\zeta \in \Gamma} |f(\zeta)|$) als

$$\Big|\int_\gamma f\Big| = \Big|\int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma'\Big| \le \int_\alpha^\beta |f \circ \gamma||\gamma'| \le \|f\|_\infty \cdot \int_\alpha^\beta |\gamma'| = \|f\|_{\Gamma,\infty} \cdot L(\gamma)\,.$$

3. Ist $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \beta$ eine Zerlegung von $[\alpha, \beta]$ und ist $\gamma_j := \gamma_{|[t_{j-1}, t_j]}$, so folgt aus D. 25.13 unmittelbar

$$\int_\gamma f = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} f$$

für alle stetigen $f : \Gamma \to \mathbb{C}$.

Beispiel 25.15 Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Pfad, $m \in \mathbb{N}_0$ und $f(z) = z^m$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann gilt nach dem HDI

$$\int_\gamma z^m dz = \int_\alpha^\beta \gamma^m(t)\gamma'(t)dt = \frac{1}{m+1}\int_\alpha^\beta (\gamma^{m+1})'(t)dt = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}),$$

wobei $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$. Also: Der Wert des Integrals hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten von γ ab, nicht aber vom Weg γ!
Insbesondere gilt für jeden geschlossenen Pfad γ

$$\int_\gamma z^m dz = 0.$$

Der folgende Satz – und gleiche Beweis – zeigt, dass ganz allgemein bei Existenz einer Stammfunktion Integrale wegunabhängig sind.

Satz 25.16 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Existiert eine Funktion $F \in H(G)$ mit $F' = f$ in G (d.h. F ist eine Stammfunktion zu f in G), so gilt für alle Pfade γ in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b*

$$\int_\gamma f = F(b) - F(a).$$

Insbesondere ist damit

$$\int_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in G.

Beweis. Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = b$. Dann gilt

$$\int_\gamma f = \int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \gamma' = \int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)' = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) == F(b) - F(a)$$

nach dem HDI. □

Damit ergibt sich unmittelbar

Satz 25.17 *(Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f holomorph in G. Dann ist

$$\int_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in G.

Beweis. Nach S. 25.7 existiert ein F mit $F' = f$ in G. Also folgt die Behauptung aus S. 25.16 □

Bemerkung 25.18 Oft werden wir Kreise betrachten. In diesem Fall liegt eine gewisse Parametrisierung nahe.
Wir schreiben daher für $\gamma : [0, 2\pi]$ mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$, und für f stetig auf $K_R(z_0) := \{z : |z - z_0| = R\} \quad (= \partial U_R(z_0))$

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} f = \int\limits_{K_R(z_0)} f := \int\limits_{\gamma} f \qquad (f \in C(\Gamma))\,.$$

Beispiel 25.19 Es sei $z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$. Dann gilt für $m \in \mathbb{Z}$

$$\int\limits_{K_R(z_0)} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & \text{, falls } m \neq -1 \\ 2\pi i & \text{, falls } m = -1 \end{cases}\,.$$

(Denn: Für $m \neq -1$ ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{K_R(z_0)} (z - z_0)^m dz &= \int\limits_0^{2\pi} (Re^{it})^m \, iRe^{it} \, dt = iR^{m+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{it(m+1)} dt \\ &= iR^{m+1} \frac{1}{i(m+1)} e^{it(m+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

und für $m = -1$ ist

$$\int\limits_{K_R(z_0)} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} (Re^{it})^{-1} \, iRe^{it} \, dt = i \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i.)$$

Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass die Aussage von S. 25.17 nicht für allgemeine Gebiete gilt!
Man beachte jedoch: In allen Fällen (also auch für $m = -1$) hängt der Wert des Integrals nicht vom Radius R ab.

26 Analytizität holomorpher Funktionen

Bemerkung 26.1 In B. 25.18 haben wir gesehen, dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta}=1.$$

Wir schreiben im Folgenden für $r\in(0,\infty]$

$$\mathbb{D}_r:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}=U_r(0)$$

und $\mathbb{D}:=\mathbb{D}_1$.
Dann ist allgemeiner

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=1\qquad(z\in\mathbb{D}).$$

(Denn: Es gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{e^{it}-z}\,dt.$$

Wir betrachten $\varphi:\mathbb{D}\times[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ mit

$$\varphi(z,t):=\frac{e^{it}}{e^{it}-z}\qquad(z\in\mathbb{D},t\in[0,2\pi])$$

und $\Phi:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ mit

$$\Phi(z):=\int\limits_0^{2\pi}\varphi(z,t)dt\qquad(z\in\mathbb{D}).$$

Dann ist nach S. 25.5 Φ differenzierbar auf $\mathbb{D}$ mit

$$\Phi'(z)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)dt==\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}dt=\frac{i}{e^{it}-z}\Big|_{t=0}^{2\pi}=0.$$

Also ist $\Phi(z)\equiv\Phi(0)=2\pi$ auf $\mathbb{D}$.)

Tatsächlich gilt wesentlich allgemeiner

Satz 26.2 *(Cauchysche Integralformel für Kreise)*
Es sei $\Omega\subset\mathbb{C}$ offen, und es sei $f\in H(\Omega)$. Ferner seien $z_0\in\Omega, R>0$ so, dass $\overline{U_R(z_0)}\subset\Omega$. Dann gilt

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_R(z_0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\qquad(z\in U_R(z_0)).$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $z_0 = 0$ und $R = 1$, d.h. $U_R(z_0) = \mathbb{D}$ annehmen (ansonsten: affin-lineare Transformation anwenden).
Es sei $z \in \mathbb{D}$ fest. Dann gilt nach B. 26.1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)e^{it}}{e^{it} - z}\, dt$$

und nach Definition

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it} - z}\, dt.$$

Wir betrachten die Funktionen $\varphi : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(\lambda, t) := \frac{f(z + \lambda(e^{it} - z))e^{it}}{e^{it} - z}$$

und $\Phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda, t) dt \qquad (\lambda \in [0,1]).$$

Dann sieht man wie in S. 25.5, dass Φ auf $[0,1]$ differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} \Phi'(\lambda) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, dt = \int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(e^{it} - z))e^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{i\lambda} f(z + \lambda(e^{it} - z))\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0 \qquad (0 < \lambda \leq 1). \end{aligned}$$

Also ist $\Phi(\lambda) \equiv \text{const}$ auf $[0,1]$ und damit $\Phi(0) = \Phi(1)$. Dies ist die Behauptung. $\square$

Bemerkung 26.3 Man beachte: S. 26.2 zeigt insbesondere, dass die Funktionswerte in $U_R(z_0)$ bereits vollständig durch die Werte am Rand $K_R(z_0)$ festgelegt sind!
Wählt man speziell $z = z_0$, so ergibt sich die wichtige *Mittelwertformel*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}}\, i\, Re^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt\,. \tag{26.1}$$

Also: Der Funktionswert im Kreismittelpunkt ergibt sich als „Integralmittel“ der Funktionswerte am Rand des Kreises.

Definition 26.4 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *analytisch an der Stelle* $z_0 \in \Omega$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (a_ν) so existieren, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))$$

gilt.
[Dann ist natürlich notwendigerweise $a_\nu = f^{(\nu)}(z_0)/\nu!$ nach S. 12.5.]
Weiter heißt f *analytisch in* Ω, falls f analytisch an jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ ist.

Bemerkung 26.5 Aus S.12.5 ergibt sich mit dieser Sprechweise: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, so ist insbesondere f holomorph in Ω.
Von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Funktionentheorie ist die Tatsache, dass auch die Umkehrung dieser Aussage wahr ist, wie wir gleich sehen werden. Als letzten Baustein benötigen wir lediglich noch folgendes Resultat:

Satz 26.6 *Es sei* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall, und es seien* $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{K}$ *stückweise stetig. Ferner sei* $\Omega := \mathbb{C} \setminus \psi([a, b])$. *Wir definieren* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *durch*

$$f(z) := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{\psi(t) - z}\, dt \qquad (z \in \Omega)\,.$$

Dann ist f *analytisch in* Ω, *und es gilt*

$$f^{(k)}(z) = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t) - z)^{k+1}}\, dt \qquad (z \in \Omega,\ k \in \mathbb{N})\,.$$

Beweis. Es sei $z_0 \in \Omega$ und $R := \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega) = \mathrm{dist}(z_0, \psi([a, b]))$. Aus

$$\left|\frac{z - z_0}{\psi(t) - z_0}\right| \le \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

für alle $z \in U_R(z_0)$ und alle $t \in [a, b]$ folgt, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\psi(t) - z_0)^{\nu+1}} = \frac{1}{\psi(t) - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\psi(t) - z_0}} = \frac{1}{\psi(t) - z}$$

für jedes feste $z \in U_R(z_0)$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert. (Weierstraßsches Majorantenkriterium; S. 11.7). Also erhalten wir mit S. 13.21

$$f(z) = \int_a^b \varphi(t) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\psi(t) - z_0)^{\nu+1}}\, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z - z_0)^\nu \cdot \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t) - z_0)^{\nu+1}}\, dt\,,$$

d.h. mit

$$a_\nu := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{\nu+1}}\,dt \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$

gilt für alle $z \in U_R(z_0)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu\,.$$

Folglich ist f analytisch an der Stelle z_0. Außerdem erhalten wir für $z = z_0$

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k = k! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\psi(t)-z_0)^{k+1}}\,dt \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

nach S. 12.5. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, folgt die Behauptung □

Bemerkung 26.7 Der Beweis zu S. 26.6 zeigt, dass die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$$

für alle z mit $|z-z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \psi([a,b]))$ gilt.

Damit erhalten wir endlich

Satz 26.8 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Dann gilt für alle $z_0 \in \Omega$ (mit* $\operatorname{dist}(z_0, \emptyset) := \infty$*)*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu \qquad \textit{in } |z-z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)\,.$$

Insbesondere ist f analytisch in Ω.

Beweis. 1. Es sei $z_0 \in \Omega$. Ist $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$, so gilt $\overline{U_R(z_0)} \subset \Omega$. Also folgt aus S. 26.2, dass für alle $z \in U_R(z_0)$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})}{z_0+Re^{it}-z} Re^{it}dt\,.$$

Nach S. 26.6 und B. 26.7 (angewandt mit $[a,b] = [0,2\pi], \psi(t) = z_0 + Re^{it}$ und $\varphi(t) = f(z_0+Re^{it})Re^{it}/2\pi$) gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu$$

für alle $z \in U_R(z_0)$. Da $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ beliebig war, gilt die Darstellung in $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω. □

Beispiel 26.9 Wit betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,.$$

Hier ist für alle $z_0 \neq 1$ und alle z mit $|z - z_0| < |1 - z_0|$

$$f(z) = \frac{1}{1 - z + z_0 - z_0} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{1-z_0}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_0)^{\nu+1}}(z-z_0)^\nu$$

mit $1/(1-z_0)^{\nu+1} = f^{(\nu)}(z_0)/\nu!$.

Bemerkung 26.10 Kombiniert man S. 26.8 und S. 12.5, so ergibt sich insbesondere, dass jede Funktion $f \in H(\Omega)$ beliebig oft differenzierbar auf Ω ist. Außerdem gilt dann auch folgende verallgemeinerte Cauchysche Integralformel für die Ableitungen:
Für alle $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \qquad (z \in U_R(z_0))\,.$$

(Denn: Nach S. 26.6 ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(z_0 + Re^{it} - z)^{k+1}}\, Re^{it} dt = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta\,.)$$

Eine erste Folgerung ist

Satz 26.11 *(Cauchysche Ungleichung)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$, und es seien $z_0 \in \Omega$ und $R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Dann ist für $0 \le r < R$

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k!R}{(R-r)^{k+1}} \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \qquad (k \in \mathbb{N}_0,\ |z - z_0| \le r)$$

und damit insbesondere

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{R^k} \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Beweis. Nach B. 26.10 gilt für $|z-z_0| \le r$

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z)| &= \Big|\frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta\Big| \\ &\le \max_{\zeta \in K_R(z_0)} |f(\zeta)| \frac{k!}{2\pi(R-r)^{k+1}}\, 2\pi R , \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Bemerkung und Definition 26.12 Eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f heißt *ganze Funktion.* Ist f ganz, so gilt nach S. 26.8 für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ (da $\operatorname{dist}(z_0, \emptyset) = \infty$)

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^{\nu} \qquad (z \in \mathbb{C}) .$$

Satz 26.13 *(Liouville)*
Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis. Nach Voreaussetzung existiert ein $M > 0$ mit $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach der Cauchyschen Ungleichung gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $R > 0$

$$|f^{(k)}(0)| \le \frac{k!}{R^k}\, M \to 0 \qquad (R \to \infty) .$$

Also ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h.

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\, z^{\nu} = f(0) \qquad (z \in \mathbb{C}) .$$

□

Bemerkung 26.14 Ist f ganz und nicht konstant, so existiert eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $|f(z_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.
(Denn: Nach dem Satz von Liouville ist f unbeschränkt. Damit existiert eine Folge (z_n) so, dass $|f(z_n)| \to \infty$. Für diese gilt auch $|z_n| \to \infty$, da ansonsten nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine Teilfolge z_{n_k} mit $z_{n_k} \to z$ existieren würde. Für diese würde dann aber auch $f(z_{n_k}) \to f(z)$ gelten. Dies widerspräche aber $|f(z_n)| \to \infty$.)

Beispiel 26.15 Ist $f(z) = \sin z$, so gilt etwa für $z_n = in$

$$|f(z_n)| = \Big|\frac{1}{2i}(e^{-n} - e^{n})\Big| \to \infty \qquad (n \to \infty) .$$

Bemerkung 26.16 Als kleine Anwendung des Satzes von Liouville ergibt sich ein kurzer Beweis zum Fundamentalsatz der Algebra (siehe S. D.2)
Wesentlicher Teil des Beweises zu S. D.2 war der Nachweis der Tatsache, dass jedes nichtkonstante Polynom P eine Nullestlle besitzt. Wir zeigen noch einmal: P hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
Denn: Angenommen, nicht, d.h. $1/P$ ist eine ganze Funktion. Dann existiert nach B. 26.14 eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $|1/P(z_n)| \to \infty\,(n \to \infty)$, also $P(z_n) \to 0\,(n \to \infty)$. Dies widerspricht aber $|P(z)| \to \infty\,(|z| \to \infty)$ (vgl. Teil 1 zum Beweis zu S. D.2).

Bemerkung und Definition 26.17 Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch an der Stelle $z_0 \in \Omega$. Dann heißt z_0 *Nullstelle der Ordnung* $m \in \mathbb{N}_0$ von f (oder *m-fache Nullstelle*), falls $f^{(j)}(z_0) = 0$ für $j = 0, \ldots, m-1$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ gilt. In diesem Fall existiert eine Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$, die analytisch an z_0 ist mit $g(z_0) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \qquad (z \in \Omega)\,.$$

(Denn: Es sei

$$f(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

für $z \in U_R(z_0)$. Wir setzen

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^{-m} f(z) & \text{für } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ a_m & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Dann gilt $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in \Omega$, und außerdem ist

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m+\nu} (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))\,,$$

also g analytisch an z_0. Außerdem ist $g(z_0) = a_m \neq 0$.)
Hieraus folgt insbesondere, dass ein $r > 0$ so existiert, das $f(z) \neq 0$ für alle z mit $0 < |z - z_0| < r$.

Wir beweisen damit eine Eigenschaft, die analytische Funktionen wesentlich gegenüber „gewöhnlichen“ C^∞-Funktionen auszeichnet.

Satz 26.18 *Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Wir setzen*

$$Z(f) := \{z_0 \in G : f(z_0) = 0\}\,.$$

Dann gilt: Entweder ist $Z(f) = G$ (d.h. $f \equiv 0$) oder $Z(f)$ hat keinen Häufungspunkt in G.

Beweis. Es sei $z_0 \in Z(f)$ fest, und es sei $R = R(z_0) > 0$ so, dass

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (z \in U_R(z_0))$$

(mit $a_\nu = f^{(\nu)}(z_0)/\nu!$) gilt. Nun sind zwei Fälle möglich: Entweder ist $a_\nu = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$, also $f(z) \equiv 0$ auf $U_R(z_0)$, oder es existiert eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq 0$, d. h. f hat eine Nullstelle der Ornung m. In diesem Fall ist z_0 kein Häufungspunkt von Nullstellen nach B./D. 26.17.
Es sei A die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ im metrischen Raum $(G, d_{|\cdot|})$ (also **nicht** in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$). Da f stetig auf G ist, gilt $A \subset Z(f)$.
Also: Ist $A \neq \emptyset$ und $z_0 \in A$, so tritt notwendigerweise der erste Fall auf, d.h. $f(z) \equiv 0$ auf einer Umgebung von z_0. Damit ist $z_0 \in A^0$, also A offen. Außerdem ist A auch abgeschlossen (in $(G, d_{|\cdot|})$) als Menge von Häufungspunkten ([Ü]). Da $(G, d_{|\cdot|})$ zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$ und damit auch $Z(f) = G$. Dies war zu zeigen. □

Als Konsequenz erhalten wir unmittelbar folgendes fundamentale Ergebnis.

Satz 26.19 *(Identitätssatz für analytische Funktionen)*
Es sei $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, und es seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Existiert eine Menge M in G mit Häufungspunkt in G und so, dass

$$f(z) = g(z)$$

für alle $z \in M$ gilt, so ist $f \equiv g$ in G.

Beweis. Mit f und g ist offenbar auch $f - g$ analytisch in G. Aus $M \subset Z(f - g)$ ergibt sich die Behauptung sofort aus S. 26.18. □

Bemerkung 26.20 Es kann durchaus sein, dass $Z(f)$ Häufungspunkte in $\mathbb{C}$ hat. Ist etwa $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \sin(\pi/z)$ für $z \neq 0$ so ist f analytisch in G und es gilt $Z(f) = \{1/n : n \in \mathbb{Z}, z \neq 0\}$. Also ist 0 ein Häufungspunkt von $Z(f)$ in $\mathbb{C}$.

Eines der zentralen Themen der reellen Analysis ist die Frage nach Extremstellen von Funktionen (mit Werten in $\mathbb{R}$). Da wir keine Ordnung in $\mathbb{C}$ haben, macht eine solche Fragestellung für komplexwertige Funktionen keinen Sinn. Wir können jedoch nach Extremstellen von $|f|$ suchen.
Bei holomorphen Funktionen bleibt diese meist erfolglos. Es gilt nämlich

Satz 26.21 *(Maximumprinzip; negative Formulierung)*
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Hat $|f|$ ein lokales Maximium, so ist $f \equiv \text{const}$.

Beweis. Es sei z_0 ein lokales Maximum von $|f|$, d.h. es existiert ein $r > 0$ mit

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \qquad \text{für alle } z \in U_r(z_0)\,.$$

Angenommen, es existiert ein $z_1 \in U_r(z_0)$ mit $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Ist $\varrho = |z_1 - z_0|$, so gilt auf Grund der Stetigkeit von $t \mapsto f(z_0 + \varrho e^{it})$ auf $[0, 2\pi]$ und $|f(z_0 + \varrho e^{it})| \leq |f(z_0)|$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{it})|dt < |f(z_0)|\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = |f(z_0)|\,,$$

also mit der Mittelwertformel (26.1)

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{it})|dt < |f(z_0)|\,.$$

Widerspruch! Damit ist $|f| \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$.
Hieraus folgt, dass auch $f \equiv \text{const}$ auf $U_r(z_0)$ ist ([Ü]). Nach dem Identitätssatz (S. 26.19) ist damit $f \equiv \text{const}$ auf G. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Satz 26.22 *(Maximumprinzip; positive Formulierung)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und es sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig auf $\overline{G}$ und holomorph in G. Dann existiert ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|\,.$$

Beweis. Ist $f \equiv \text{const}$, so ist die Behauptung klar.
Es sei $f \not\equiv \text{const}$. Da G beschränkt ist, ist $\overline{G} = G \cup \partial G$ kompakt. Also existiert ein $z_0 \in \overline{G}$ mit $|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|$ (beachte: $|f|$ stetig auf $\overline{G}$). Dabei ist $z_0 \notin G$ nach S. 26.21, also $z_0 \in \partial G$. □

Bemerkung und Definition 26.23 Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Wir setzen

$$M(r, f) := \max_{|z| \leq r} |f(z)| \qquad (r \geq 0)\,.$$

Dann existiert zu jeden $r \geq 0$ ein z_r mit $|z_r| = r$ und

$$M(r, f) = |f(z_r)|\,.$$

Beispiel 26.24 Wir betrachten

$$f(z) = \cos z\,.$$

Hier gilt: Ist $z = x + iy$, mit $|z| \leq r$, so folgt

$$|\cos z| \leq \frac{1}{2}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh(y) \leq \cosh(r)\ .$$

(beachte: cosh ist auf $[0, \infty)$ monoton wachsend und gerade). Folglich ist $M(r, f) \leq \cosh(r)$. Für $z_r := ir$ gilt dabei

$$|\cos z_r| = \cos(ir) = \cosh(r)\ .$$

Also ist

$$\cosh(r) = M(r, f) = |\cos z_r|\,.$$

Bemerkung 26.25 Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, so gilt natürlich für alle Nullstellen z_0 von f

$$|f(z_0)| = 0 \leq |f(z)| \qquad (z \in G)\,,$$

d.h. Nullstellen sind Minima von $|f|$. Ist aber $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ (d.h. $Z(f) = \emptyset$), so hat f im Falle $f \not\equiv$ const auch kein lokales Minimum in G (Minimumprinzip; negative Formulierung).
Außerdem existiert dann im Falle, dass G beschränkt ist, stets ein $z_0 \in \partial G$ mit

$$|f(z_0)| = \min_{z \in \overline{G}} |f(z)|$$

(Minimumprinzip; positive Formulierung).
Beides ergibt sich unmittelbar durch Anwendung obiger Maximumprinzipien auf $1/f$.

Wir wollen nun das lokale Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion etwas genauer beleuchten. Das Maximumprinzip wird sich dabei auch noch einmal als Konsequenz eines allgemeineren Resultats ergeben.

Satz 26.26 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ist $z_0 \in \Omega$ mit $f'(z_0) \neq 0$, so existieren offene Umgebungen U von z_0 in Ω und V von $w_0 = f(z_0)$ in $f(\Omega)$ so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist mit $f'(z) \neq 0$ in U. Außerdem ist dann $f^{-1} := (f_{|U})^{-1} : V \to U$ holomorph mit*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad (w \in V)\,.$$

Beweis. Betrachtet man f als Abblildung von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, so folgt aus (25.2) leicht ([Ü])

$$|f'(z)|^2 = \det Jf(z)\,.$$

Also ergeben sich der erste Teil der Aussage und die Stetigkeit von f^{-1} durch Anwendung des Hauptsatzes über Umkehrfunktionen (S. 17.3).
Ist $w \in V$ fest und ist w_n eine Folge in V mit $w_n \to w$, $w_n \neq w$, gilt für $z_n = f^{-1}(w_n)$ und $z = f^{-1}(w)$ (da $z_n \neq z$ für alle n und $z_n \to z$)

$$\frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w)}{w_n - w} = \frac{z_n - z}{f(z_n) - f(z)} \to \frac{1}{f'(z)} \qquad (n \to \infty)\,.$$

Folglich ist f^{-1} differenzierbar an w mit

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}\,.$$

Da $f' \circ f^{-1}$ stetig auf V ist, ist f^{-1} holomorph in V. □

Beispiel 26.27 Wir betrachten $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann gilt $f'(z) = 2z \neq 0$ für alle $z \neq 0$. Ist also $z_0 \neq 0$, so existieren offene Umgebungen U von z_0 und V von z_0^2 so, dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist.
Man beachte jedoch: f ist nicht injektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (da $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt).

Satz 26.28 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f \in H(\Omega)$. Ferner sei $z_0 \in \Omega$ und $w_0 = f(z_0)$, wobei z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von $f - w_0$ ist. Dann existieren eine offene Umgebung U von z_0 und eine in U holomorphe Funktion φ mit $\varphi(z_0) = 0$ sowie $\varphi'(z_0) \neq 0$ und so, dass*

$$f(z) = w_0 + \varphi^m(z) \qquad (z \in U)\,.$$

Beweis. O. E. können wir $w_0 = 0$ annehmen (sonst: $f - w_0$ statt f betrachten).
Es seien $U := U_r(z_0)$ und $g \in H(U)$ so, dass $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ (existieren nach B./D. 26.17). Dann existiert nach S. 25.7 ein $h \in H(U)$ mit $h' = g'/g$. Wählt man h so, dass $e^{h(z_0)} = g(z_0)$ gilt, so ist damit auch $e^h = g$ ([Ü]).
Ist $\varphi : U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) = (z - z_0)e^{h(z)/m} \qquad (z \in U)\,,$$

so gilt

$$\varphi^m(z) = (z - z_0)^m e^{h(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z) \qquad (z \in G)\,.$$

Dabei ist $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) \neq 0$. □

Als unmittelbare Konsequenz erhalten wir

Satz 26.29 *(Gebietstreue holomorpher Funktionen)*
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis. Es sei $w_0 = f(z_0) \in f(G)$, und es seien U und φ wie in S. 26.28 (man beachte: jede Nullstelle von $f - w_0$ hat endliche Ordnung nach S. 26.18). Nach S. 26.26 kann dabei U so gewählt werden, dass $\varphi : U \to U_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$ bijektiv ist. Da $w \mapsto w^m + w_0$ die Kreisscheibe $U_\delta(0)$ **auf** $U_{\delta^m}(w_0)$ abbildet, ist $U_{\delta^m}(w_0) = f(U) \subset f(G)$, also ist $f(G)$ offen. Da f insbesondere stetig auf G ist, ist $f(G)$ auch zusammenhängend nach S. 22.13. □

Bemerkung 26.30 Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in H(G)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, so ist für alle $w_0 \in f(G)$ und alle $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset G$ die Menge $f(U_r(z_0))$, wobei z_0 so, dass $f(z_0) = w_0$, offen. Also existiert insbesondere stets ein $w_1 \in f(U_r(z_0))$ mit $|w_1| > |w_0|$. Damit hat $|f|$ keine lokalen Maxima in G. Dies zeigt, dass S. 26.29 das Maximumprinzip umfasst.

27 Fourier- und Laurent-Reihen

In verschiedenen vorangegangenen Abschnitten haben wir uns mit Taylor-Reihen bzw. Potenzreihen beschäftigt. Wir wollen nun eine andere Art von Reihenentwicklungen untersuchen, die den wesentlichen Vorteil hat, dass keine Ableitungen von f benötigt werden. Dazu stellen wir zunächst einige Vorüberlegungen an.

Bemerkung und Definition 27.1 Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein Pfad, und es sei $\Gamma := \gamma([\alpha, \beta])$. Wir definieren für $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ stetig

$$\int_\gamma f(z)|dz| := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Ist

$$C(\Gamma) := \{f : \Gamma \to \mathbb{C}, f \text{ stetig}\},$$

so sind im Falle $|\gamma'(t)| \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ durch

$$< f, g >:= \frac{1}{L(\gamma)} \cdot \int_\gamma f(z)\, \overline{g}(z)\, |dz| \qquad (f, g \in C(\Gamma))$$

ein Skalarprodukt auf $C(\Gamma)$ und durch

$$\|f\|_2 := \|f\| :=< f, f >$$

eine Norm auf $C(\Gamma)$ definiert.

Beispiel 27.2 Es sei $\gamma(t) := e^{it}(t \in [-\pi, \pi])$. Dann ist $|\gamma'(t)| \equiv 1$, d.h.

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt = \int_\gamma f(z)\frac{dz}{iz} \qquad (f \in C(\partial\mathbb{D})).$$

Wir schreiben im Weiteren kurz

$$S := \partial\mathbb{D}(= K_1(0))$$

und

$$\int_{|z|=1} f(z)|dz| := \int_S f(z)|dz| := \int_\gamma f(z)|dz|.$$

Ist ferner $f_k : S \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$f_k(z) := z^k \qquad (z \in S),$$

so gilt dabei

$$\begin{aligned}< f_k, f_j > &= \frac{1}{2\pi}\int_S z^k\,\overline{z^j}\,|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t}dt \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i(k-j)} e^{i(k-j)t}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & , \ k \neq j \\ 1 & , \ k = j \end{cases} .\end{aligned}$$

Damit ist $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem (ONS) in $(C(S), < \cdot, \cdot >)$.
Mit S. 11.10 und S. 13.21 ergibt sich: Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu z^\nu \qquad \text{gleichmäßig auf } S ,$$

so gilt $f \in C(S)$ und $a_k =< f, f_k >$ für alle k.
(Denn: Es ist

$$< f, f_k >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i(\nu-k)t}dt = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu-k)t}dt = a_k.)$$

Definition 27.3 Es sei $f \in C(S)$. Dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(k) :=< f, f_k >:= \frac{1}{2\pi}\int_S f(\zeta)\,\overline{\zeta}^k\,|d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})e^{-iks}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta$$

k-ter *Fourier-Koeffizient* von f. Weiter heißt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n(z) := S_n(f)(z) := \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu)z^\nu = \sum_{\nu=-n}^{n} < f, f_k > f_k(z) \qquad (z \in S)$$

n-te *Fourier-Teilsumme* von f und die formale Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu)z^\nu := (S_n(z))_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Fourier-Reihe von f.

Beispiel 27.4 1. Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu \qquad (z \in \mathbb{D}_R)$$

für ein $R > 1$, so konvergiert die Taylor-Reihe nach S. 12.3 gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}_R$, also insbesondere gleichmäßig auf S. Nach B. 27.2

ergibt sich $\hat{f}(k) = f^{(k)}(0)/k!$ für $k \geq 0$ und $\hat{f}(k) = 0$ für $k < 0$. Also stimmt die Taylor-Reihe von f auf S mit der Fourier-Reihe von $f_{|S}$ überein.
2. Wir betrachten $f : S \to \mathbb{R}$ mit

$$f(e^{it}) := |t| \qquad (t \in [-\pi, \pi])\,,$$

d. h $f(z) = |\arg(z)|$ wobei $\mathrm{Im}(\log z) =: \arg(z)$ für $z \in S \setminus \{-1\}$ (und $\arg(-1) := \pi$). Dann gilt für $k \neq 0$

$$2\pi \hat{f}(k) == \int_{-\pi}^{\pi} |s| \cos(-ks)\, ds + i \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |s| \sin(-ks)\, ds}_{=0} = 2\int_{0}^{\pi} s\cos(ks)\, ds = \frac{2}{k^2}((-1)^k - 1)\,,$$

also

$$\hat{f}(k) = -\frac{2}{\pi k^2} \quad (k \text{ ungerade})\,, \qquad \hat{f}(k) = 0 \quad (k \text{ gerade}, k \neq 0)\,.$$

Außerdem ist

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Folglich gilt für $z = e^{it} \in S$

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) z^\nu &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\nu \text{ ungerade}} \frac{z^\nu}{\nu^2} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{z^\nu + z^{-\nu}}{\nu^2} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\mathrm{Re}(z^\nu)}{\nu^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu>0 \text{ ungerade}} \frac{\cos(\nu t)}{\nu^2}\,.
\end{aligned}$$

Dabei ist die Konvergenz (auch für die mit den Absolutbeträgen gebildete Reihe) gleichmäßig auf S.

Bemerkung 27.5 Bisher wissen wir nur wenig darüber, unter welchen Bedingungen die Fourierreihe die Funktion f darstellt, d.h. wann (und in welchem Sinne)

$$f = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$$

gilt.
Da $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS ist, ergibt sich (siehe Lineare Algebra)

$$\|f - S_n(f)\|_2 = \mathrm{dist}(f, T_n),$$

wobei

$$T_n := \mathrm{linspan}\{f_k : k \in \{-n, \dots, n\}\}$$

die Menge des *trigonometrischen Polynome* vom Grad $\leq n$ bezeichnet.
Also: $S_n(f) \in T_n$ ist die beste Approximation an f bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm.
Wenn wir also nach Konvergenz bzgl. $||\cdot||_2$ fragen, so folgt, dass

$$||f - S_n(f)||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

für alle $f \in C(S)$ schon dann gilt, wenn nur $\mathrm{dist}(f, T_n) \to 0$ erfüllt ist, m.a.W., wenn $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ (die Menge der trigonometrischen Polynome) dicht in $(C(S), ||\cdot||_2)$ ist. Da für alle $f \in C(S)$

$$||f||_2 = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_S |f(z)|^2 |dz|\Big)^{1/2} \leq ||f||_\infty \ \Big(= \max_{z\in S} |f(z)|\Big)$$

gilt, reicht es dafür zu zeigen, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ dicht in $(C(S), ||\cdot||_\infty)$ ist.

Bemerkung und Definition 27.6 Es seien $f, g \in C(S)$. Wir definieren die *Faltung* $f * g : S \to \mathbb{C}$ von f und g durch

$$\begin{aligned}(f*g)(z) \ &:= \ \frac{1}{2\pi}\int_S f(z\overline{\zeta})g(\zeta)|d\zeta| \\ &= \ \frac{1}{2\pi i}\int_S f(z/\zeta)g(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (z \in S).\end{aligned}$$

Dann ist $f * g$ stetig auf S, und es gilt

$$f * g = g * f.$$

([Ü]). Ist dabei speziell $f \in T_n$, so gilt

$$f = \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) z^\nu,$$

und damit

$$\begin{aligned}(f*g)(z) \ &= \ \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) z^\nu \frac{1}{2\pi}\int_S \overline{\zeta}^\nu g(\zeta)|d\zeta| \\ &= \ \sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu) z^\nu \qquad (z \in S).\end{aligned}$$

Also ist auch $f * g \in T_n$ mit

$$(f*g)\widehat{\ }(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

Wir setzen für $A \subset S$ mit $t \mapsto \chi_A(e^{it}) \in R[-\pi,\pi]$

$$\int_A f(z)|dz| := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\chi_A(e^{it})dt.$$

Satz 27.7 *Es sei (Q_n) eine Folge mit $Q_n \in T_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und so, dass*

(i) $Q_n \geq 0$ *auf* S $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_S Q_n(\zeta)|d\zeta| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$,

(iii) $\int\limits_{S \setminus U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \to 0$ $(n \to \infty, \delta > 0)$.

Ist $f \in C(S)$, so gilt

$$f * Q_n \to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } S.$$

Beweis. Mit (ii) ergibt sich zunächst

$$(f * Q_n)(z) - f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S (f(z\overline{\zeta}) - f(z))Q_n(\zeta)|d\zeta| \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N}),$$

also mit (i)

$$|(f * Q_n)(z) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_S |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N}).$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig auf der kompakten Menge S ist, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(z\overline{\zeta}) - f(z)| < \varepsilon \qquad (z \in S, |\zeta - 1| < \delta).$$

Hieraus folgt wieder mit (ii)

$$\sup_{z\in S}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{U_\delta(1)} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq \varepsilon$$

Mit (iii) gilt zudem

$$\sup_{z\in S}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S\setminus U_\delta(1)} |f(z\overline{\zeta}) - f(z)|Q_n(\zeta)|d\zeta| \leq 2\|f\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S\setminus U_\delta(1)} Q_n(\zeta)|d\zeta| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Folglich ist für n genügend groß

$$\|f * Q_n - f\|_\infty < 2\varepsilon.$$

□

Beispiel 27.8 Es stellt sich natürlich die Frage nach der Existenz von Folgen (Q_n) wie in S. 27.7. Ein Beispiel ist

$$Q_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) z^\nu \qquad (z \in S, n \in \mathbb{N})$$

(Q_n heißt n-ter *Fejér-Kern*). Es gilt dafür: $Q_n \in T_n$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_S Q_n(\zeta)|d\zeta| = \sum_{\nu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\Big) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_S \zeta^\nu |d\zeta|}_{=\delta_{0,\nu}} = 1,$$

also ist jedenfalls (ii) erfüllt. Weiter ist für $z \in S$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 &= \frac{1}{n+1} \Big(\sum_{j=0}^{n} z^j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} \overline{z}^j\Big) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j,k=0}^{n} z^{j-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=-n}^{n} (n+1-|\ell|) z^\ell = Q_n(z), \end{aligned}$$

also $Q_n \geq 0$ und für $z \in S \setminus U_\delta(1)$

$$Q_n(z) = \frac{1}{n+1} \Big|\sum_{j=0}^{n} z^j\Big|^2 = \frac{1}{n+1} \Big|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\Big|^2 \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{4}{\delta^2} \to 0.$$

Damit gilt $Q_n \to 0$ gleichmäßig auf $S \setminus U_\delta(1)$. Also ist insbesondere auch (iii) erfüllt. Nach S. 27.7 gilt also für alle $f \in C(S)$

$$f * Q_n \to f \qquad \text{gleichmäßig auf } S.$$

Da alle $f * Q_n$ trigonometrische Polynome (von Grad $\leq n$) sind, ist insbesondere $\bigcup T_n$ dicht in $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$.

Satz 27.9 *(Fejér)*
Es sei $f \in C(S)$. Dann gilt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu(f) \to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } S.$$

Beweis. Es sei Q_n der n-te Fejér-Kern. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu(f)(z) &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \hat{f}(\mu) z^\mu = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=-n}^{n} \hat{f}(\mu) z^\mu \underbrace{\sum_{\nu=|\mu|}^{n} 1}_{=n+1-|\mu|} = \sum_{\mu=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\mu|}{n+1}\Big) \hat{f}(\mu) z^\mu \\ &= f * Q_n(z), \end{aligned}$$

d.h. $f * Q_n$ ist das arithmetische Mittel der Fourier-Teilsummen $S_0(f), \ldots, S_n(f)$. Also folgt die Behauptung mit B. 27.8. □

Bemerkung 27.10 Wie bereits in B. 27.5 erläutert, impliziert B. 27.8 oder S. 27.9 insbesondere, dass für alle $f \in C(S)$ gilt

$$||f - S_n(f)||_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

d.h. $S_n(f) \to f$ „im Mittel". Dies bedeutet jedoch noch nicht, dass stets auch

$$S_n(f)(z) \to f(z)$$

für alle $z \in S$ gilt. Tatsächlich gilt dies auch nicht für alle $f \in C(S)$ (genauer ist $(S_n(f)(z))_n$ noch nicht einmal für alle z unf f beschränkt, was wir jedoch nicht zeigen werden).

Als Folgerung aus S. 27.9 erhalten wir

Satz 27.11 *Es sei $f \in C(S)$. Dann gilt*

1. $||f||_2^2 = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2$ *(Parsevalsche Gleichung).*
2. *Gilt $\hat{f}(\nu) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$, so ist $f \equiv 0$.*
3. *Konvergiert $S_n(f)$ gleichmäßig auf S, so gilt*
$$S_n(f) \to f\,.$$

Beweis.
1. Es gilt $S_n(f) \in T_n$ und $f - S_n(f) \in T_n^\perp$ ($\to$ Lineare Algebra). Also ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras

$$||f||_2^2 \;=\; ||f - S_n(f)||_2^2 + ||S_n(f)||_2^2\,.$$

Nach B. 27.10 gilt $||f - S_n(f)||_2^2 \to 0\,(n \to \infty)$, d.h. $||S_n(f)||_2^2 \to ||f||_2^2\,(n \to \infty)$. Außerdem ist (wieder mit Pythagoras)

$$||S_n(f)||_2^2 \;=\; ||\sum_{\nu=-n}^{n} \hat{f}(\nu) f_\nu||_2^2 \;=\; \sum_{\nu=-n}^{n} |\hat{f}(\nu)|^2 \underbrace{\|f_\nu\|_2^2}_{=1} = \sum_{\nu=-n}^{n} |\hat{f}(\nu)|^2\,.$$

Damit ergibt sich 1.

2. Ist $\hat{f}(\nu) = 0\,(\nu \in \mathbb{Z})$, so ist $||f||_2^2 = 0$ nach 1., also $f \equiv 0$.
3. Nach Voraussetzung ist $g : S \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(f)(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) z^\nu$$

stetig auf S (S. 11.10). Außerdem gilt nach B. 27.2

$$\hat{g}(k) = \hat{f}(k)\,,$$

also auch $(f-g)\hat{}(k) = 0$. Nach 2. ist $f - g \equiv 0$. □

Wir untersuchen nun Funktionen f, die holomorph sind in einem Kreisring

$$V_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}\,,$$

wobei $0 \le r < R \le \infty$.

Bemerkung 27.12 Es sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{R} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} = r\,,$$

so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilnmenge von $|z - z_0| < R$ (S. 12.3) und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-z_0)^{-\nu}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $|z - z_0| > r$ (Anwendung von S. 12.3 auf $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}\zeta^\nu$ mit $\zeta = (z - z_0)^{-1}$). Also ist im Falle $r < R$ die Summe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ der beiden Reihen gleichmäßig konvergent auf jeder kompakten Teilmenge des Kreisringes $V_{r,R}(z_0)$. Ausserdem ist

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}(z-z_0)^{-\nu}$$

holomorph in $V_{r,R}(z_0)$ (wieder mit S. 12.3).

Beispiel 27.13 Für $a_\nu := 1/|\nu|!$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} = 0\,,$$

also $r = 0$ und $R = \infty$. Hier ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu! z^\nu} = e^z + e^{1/z} - 1$$

holomorph in $V_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Wir zeigen nun, dass jede in einem Kreisring holomorphe Funktion durch eine solche Reihe dargestellt wird.

Bemerkung und Definition 27.14 Es sei $f \in H(V)$, wobei $V = V_{r,R}(z_0)$, und es sei für $k \in \mathbb{Z}$

$$a_k(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \lambda} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \qquad (\lambda \in (r, R)) .$$

Dann ist $\lambda \mapsto a_k(\lambda) =: \hat{f}_V(k)$ konstant auf (r, R).
(Denn: O.E. können wir $z_0 = 0$ und $r < 1 < R$ annehmen (ansonsten: affin-lineare Transformation anwenden). Dann ist $\zeta \mapsto f(\zeta)/\zeta^k$ holomorph in $V_{r,R}(0)$. Der Beweis zu S. 26.2 mit $z = 0$ und $\zeta \mapsto f(\zeta)/\zeta^k$ anstelle von f zeigt zeigt, dass $a_k(\lambda)$ unabhängig von λ ist.)
Mit $\hat{f}_V(k) := a_k(\lambda)$ heißt die (formale) Reihe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z - z_0)^\nu$ *Laurent-Reihe* von f bzgl. V. Ferner heißen die (Potenz-)Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z - z_0)^\nu$ *Regulärteil* (oder auch *Nebenteil*) und die Reihe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} \hat{f}_V(\nu)(z - z_0)^\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_V(-\nu)(z - z_0)^{-\nu}$ *Hauptteil* der Laurent-Reihe.

Satz 27.15 *Es seien $0 \leq r < R \leq \infty$ sowie $z_0 \in \mathbb{C}$, und es sei $f \in H(V_{r,R}(z_0))$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z - z_0)^\nu$$

mit gleichmäßiger Konvergenz von Regulär- und Hauptteil auf allen kompakten Teilmengen von $V_{r,R}(z_0)$.
Außerdem ist die Darstellung eindeutig, d.h. ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von $V_{r,R}(z_0)$, so ist $b_k = \hat{f}_V(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis.
1. Wir setzen zur Abkürzung $a_\nu := \hat{f}_V(\nu)$. Es gilt für $r < \lambda < R$

$$|a_\nu| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \lambda} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\lambda}{\lambda^{\nu+1}} \max_{|\zeta - z_0| = \lambda} |f(\zeta)| = \frac{M}{\lambda^\nu} \qquad (\nu \in \mathbb{Z})$$

mit $M := M_\lambda := \max\limits_{|\zeta - z_0| = \lambda} |f(\zeta)|$. Also folgt

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \leq \lambda .$$

Da $\lambda \in (r, R)$ beliebig war, ist

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq \frac{1}{R} \qquad \text{und} \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \leq r\,.$$

Aus B. 27.12 ergibt sich die Konvergenzaussage.
Es sei $\tilde{f}(z) := \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ und $\rho \in (r, R)$ fest. Ferner sei $g = g_{z_0,\rho} : S \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(s) := f(z_0 + \rho s) \qquad (s \in S).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(s)e^{-iks}ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z_0+\rho e^{is})e^{-iks}ds \\ &= \frac{\rho^k}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta = \rho^k a_k \qquad (k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

und damit für $z = z_0 + \rho s$ nach S. 27.11.3

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_0+\rho s) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_\nu \rho^\nu}_{=\hat{g}(\nu)} s^\nu = \lim_{n\to\infty} S_n(g)(s) = g(s) = f(z)\,.$$

Da $\rho \in (r, R)$ beliebig war, ist $f = \tilde{f}$ in $V_{r,R}(z_0)$.
2. Ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$ lokal gleichmäßig in $V_{r,R}(z_0)$, so gilt für $\rho \in (r, R)$ und $k \in \mathbb{Z}$ nach S. 13.21

$$\hat{f}_V(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\rho} (\zeta-z_0)^{\nu-k-1}d\zeta = b_k\,.$$

□

Bemerkung 27.16 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ für ein $z_0 \in \Omega$. Ist f beschränkt in $0 < |z-z_0| \leq \delta$ für ein $\delta > 0$, so gilt für alle $\nu < 0$ und $0 < \lambda \leq \delta$

$$|\hat{f}_V(\nu)| \leq \max_{|\zeta|\leq\delta} |f(\zeta)|\lambda^{-\nu} \to 0 \qquad (\lambda \to 0)$$

(vgl. Beweis zu S. 27.15). Also ist $\hat{f}_V(\nu) = 0$ für $\nu < 0$ und damit nach S. 27.15

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-z_0)^\nu$$

für $0 < |z - z_0| < R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Also ist f zu einer in Ω holomorphen Funktion fortsetzbar und die Potenzreihenentwicklung gilt auf $U_R(z_0)$.
Ist schon $f \in H(\Omega)$, so ist dies natürlich der Fall. Also haben wir einen weiteren Beweis zu S. 26.8. Außerdem gilt in diesem Fall auch $\hat{f}_V(\nu) = f^{(\nu)}(z_0)/\nu!$ für $\nu \geq 0$ nach S. 12.3.

28 Isolierte Singularitäten und Residuensatz

Bisher haben wir uns mit dem Verhalten holomorpher Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in der Menge Ω beschäftigt. Oft ist aber das Verhalten holomorpher Funktionen bei Annäherung an Randpunkte von Ω besonders interessant. Der einfachste Fall eines solchen Randpunktes ist der eines isolierten Punktes, mit dem wir uns jetzt genauer befassen.

Bemerkung und Definition 28.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $a \in \Omega$. Ist $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, so heißt a eine *isolierte Singuarlität* von f. Ist dabei $R := \mathrm{dist}(a, \partial\Omega)$, so hat f in $V := V_{0,R}(a) = U_R(a) \setminus \{a\}$ die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-a)^\nu = \sum_{\nu=\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

gemäß S. 27.15. Is h der Hauptteil der Laurent-Reihe, so heißt a

1. *hebbare Singularität* falls $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ (d.h. $h \equiv 0$).
2. *Pol der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$ falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu > p$ (d.h. $h(z) = \sum_{\nu=1}^{p} a_{-\nu}(z-a)^{-\nu}$).
3. *wesentliche Singularität* falls $a_{-\nu} \neq 0$ für ∞ viele $\nu \in \mathbb{N}$.

Beispiel 28.2 1. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Hier gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+1)!} \quad \text{in} \quad V_{0,\infty}(0)\,,$$

also ist $h(z) \equiv 0$. d.h. $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Damit hat f an 0 eine hebbare Singularität.

2. Es sei $a \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^p} \qquad (z \neq a).$$

Hier ist $h(z) = (z-a)^{-p} (= f(z))$ in $V_{0,\infty}(a)$, d.h. $a_{-p} = 1$ und $a_{-\nu} = 0$ für $\nu \in \mathbb{N}, \nu \neq p$. Also hat f an a einen Pol der Ordung p.

3. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Dann ist

$$f(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^{-\nu} \quad \text{in} \quad V_{0,R}(0)\,,$$

also ist hier $h(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} z^{-\nu}/\nu! = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} z^{-\nu}$, d.h. $a_{-\nu} = 1/|\nu|! \neq 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Folglich hat f an 0 eine wesentliche Singularität.

Wir wollen nun für alle drei Typen isolierter Singularitäten Charakterisierungen herleiten.

Satz 28.3 *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ für ein $a \in \Omega$. Dann sind äquivalent

a) f hat an a eine hebbare Singularität.

b) Es existiert eine Umgebung U von a so, dass f in $U \setminus \{a\}$ beschränkt ist.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist a eine hebbare Singularität von f, so existiert eine Funktion f_0 in $H(\Omega)$ mit $f(z) = f_0(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Insbesondere gilt dann

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} f_0(z) = f_0(a)\,.$$

Also existiert ein $r > 0$ so, dass $|f(z)| < |f_0(z)| + 1$ für alle $z \in U_r(a) \setminus \{a\}$.
b) $\Rightarrow$ a): Ergibt sich aus B. 27.16. □

Für Pole der Ordnung p gilt folgende Charakterisierung.

Satz 28.4 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind äquivalent:*

a) f hat an a einen Pol der Ordnung p.

b) Es existiert eine Funktion $g \in H(\Omega)$ mit $g(a) \neq 0$ und so, dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \Omega,\ z \neq a)$$

c) $1/f$ ist holomorph (fortsetzbar) auf einer offenen Umgebung U von a mit Nullstelle der Ordnung p an der Stelle a.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wir setzen $g(z) := (z-a)^p f(z)$ für $z \in \Omega$, $z \neq a$. Ist

$$f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad V_{0,R}(a)$$

mit $a_{-p} \neq 0$, so ist

$$g(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}(z-a)^\nu$$

holomorph (fortsetzbar) nach Ω mit $g(a) = a_{-p} \neq 0$ und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p} \quad \text{in } \Omega \setminus \{a\}\,.$$

b) $\Rightarrow$ c): Es sei U eine offene Umgebung von a so, dass $g(z) \neq 0$ in U. Dann ist

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Also ist $1/f$ holomorph fortsetzbar an der Stelle a, und die Fortsetzung hat nach B./D. 26.17 eine Nullstelle der Ordnung p an a.
c) $\Rightarrow$ a): Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \cdot g_0(z) \qquad (z \in U \setminus \{a\})$$

mit einer Funktion $g_0 \in H(U)$ mit $g_0(a) \neq 0$. Dann ist auch $g_0(z) \neq 0$ auf einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von a. Also ist

$$f(z) = \frac{1/g_0(z)}{(z-a)^p} \qquad (z \in \tilde{U} \setminus \{a\})\,.$$

Da $1/g_0$ holomoroph in $\tilde{U}$ ist, hat $1/g_0$ eine Potenzreihendarstellung

$$1/g_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu \quad \text{in} \quad U_\delta(a)$$

für ein $\delta > 0$. Damit ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^{\nu-p} = \sum_{\nu=-p}^{\infty} b_{\nu+p}(z-a)^\nu\,,$$

in $V_{0,\delta}(a)$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen, d. h.

$$h(z) = \sum_{\nu=-p}^{-1} b_{\nu+p}(z-a)^\nu = \sum_{\nu=1}^{p} b_{p-\nu}(z-a)^{-\nu}$$

ist der Haupttteil der Laurent-Reihe, und es gilt $a_{-p} = b_0 = 1/g_0(a) \neq 0$. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz 28.5 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann hat f an a genau dann einen Pol, wenn gilt*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty\,.$$

Beweis. Hat f an a einen Pol, etwa der Ordnung p, so gilt mit g wie in S. 28.4 (da $g(a) \neq 0$)

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z-a|^p} \to \infty \qquad (z \to a).$$

Gilt umgekehrt

$$|f(z)| \to \infty \qquad (z \to \infty),$$

so existiert eine offene Umgebung U von a mit $f(z) \neq 0$ in U und

$$\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

also ist $1/f$ nach S. 28.3 holomorph fortsetzbar an der Stelle a mit Nullstelle, etwa der Ordnung p. Dann hat f nach S. 28.4 einen Pol der Ordnung p. □

Beispiel 28.6 Es gilt

$$Z(\sin) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad Z(\cos) = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

und alle Nullstellen sind von der Ordnung 1. Damit hat auch tan an den Stellen $k\pi$ Nullstellen der Ordnung 1 und cot an den Stellen $(k + 1/2)\pi$. Nach S. 28.4 hat $\cot = 1/\tan$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $k\pi$ und $\tan = 1/\cot$ Pole der Ordnung 1 an den Stellen $(k + 1/2)\pi$.
Nach S. 28.5 gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \to k\pi} |\cot z| = \lim_{z \to (k+\frac{1}{2})\pi} |\tan z| = \infty.$$

Bleibt noch, das Verhalten in der Nähe von wesentlichen Singularitäten zu charakterisieren. Bitte schön:

Satz 28.7 *(Casorati-Weierstraß)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind äquivalent:

a) f hat an a eine wesentliche Singularität.

b) Für alle offenen Umgebungen U von a in Ω gilt

$$\overline{f(U \setminus \{a\})} = \mathbb{C},$$

m.a.W. zu jedem $w \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge z_n in $\Omega \setminus \{a\}$ mit $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.

Beweis. b) $\Rightarrow$ a): Gilt die Bedingung b), so ist f unbeschränkt in jeder Umgebung von a, und es gilt sicher nicht $|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$. Folglich hat f an a weder eine hebbare Singularität noch einen Pol (S. 28.3 bzw. S. 28.5). Also hat f an a eine wesentliche Singuarlität.
a) $\Rightarrow$ b): Angenommen, es existiert eine offene Umgebung U von a mit

$$\overline{f(U \setminus \{a\})} \neq \mathbb{C}\,.$$

Dann existieren ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$ so, dass $|f(z) - w| \geq \delta$ für alle $z \in U \setminus \{a\}$ gilt. Wir definieren $g : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \qquad (z \in U \setminus \{a\})\,.$$

Dann ist $g \in H(U \setminus \{a\})$ mit $|g(z)| < 1/\delta$ für alle $z \in U, z \neq a$. Also hat g an a eine hebbare Singuarlität nach S. 28.3 (wir schreiben auch für die Fortsetzung wieder g).
Ist $g(a) \neq 0$, so ist $f(z) = w + 1/g(z)$ beschränkt in einer Umgebung von a, also hat f wieder nach S. 28.3 eine hebbare Singuarlität. Widerspruch!
Ist $g(a) = 0$, so gilt

$$|f(z) - w| = \frac{1}{|g(z)|} \to \infty \qquad (z \to a)\,,$$

also auch

$$|f(z)| \to \infty \qquad (z \to a)\,.$$

Damit hat f an a einen Pol nach S. 28.5. Widerspruch! □

Bemerkung 28.8 Hat f an a eine wesentliche Singularität, so existiert auch stets eine Folge (z_n) mit $z_n \to a$ und $|f(z_n)| \to \infty$.
(Denn: Für alle n existiert ein z_n mit $|z_n - a| < 1/n$ und $|f(z_n) - n| < 1$.)

Beispiel 28.9 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = e^{1/z} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Für die Folge $(1/n)$ gilt $f(1/n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ und für die Folge $(-1/n)$ gilt $f(-1/n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Ist $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ und $w = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so gilt für die Folge

$$z_n = [\ln r + i(\varphi + 2n\pi)]^{-1}$$

$z_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$f(z_n) = e^{\ln r + i(\varphi + 2n\pi)} = re^{i\varphi} = w\,.$$

Also gilt hier sogar $f(z_n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und damit natürlich insbesondere $f(z_n) \to w \ (n \to \infty)$). Es ist also hier tatsächlich

$$f(U \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für alle Umgebungen U von 0, d.h. in jeder (noch so kleinen) Umgebung von 0 wird jeder Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (unendlich oft) als Funktionswert angenommen!

Bemerkung 28.10 Eine ganze Funktion f heißt *transzendent*, falls f kein Polynom ist. Durch Übertragung des Satzes von Casorati-Weierstraß sieht man: Ist f transzendent, so existiert zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $|z_n <\to \infty$ und $f(z_n) \to w \ (n \to \infty)$.
(Denn: Es sei $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \ (z \in \mathbb{C})$. Dann hat $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f\Big(\frac{1}{z}\Big) \qquad (z \neq 0)\,,$$

die Laurent-Entwicklung

$$g(z) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Da $a_\nu \neq 0$ für ∞ viele ν gilt (beachte: f ist kein Polynom), hat g an 0 eine wesentliche Singularität nach S. 28.1. Also existiert nach S. 28.7 zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (ζ_n) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\zeta_n \to 0$ und $g(\zeta_n) \to w \ (n \to \infty)$. Die Folge (z_n) mit $z_n = 1/\zeta_n$ erfüllt dann $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to w \ (n \to \infty)$.)
Man sagt auch, eine ganze Funktion habe eine „isolierte Singularität an ∞“. Konstante Funktionen haben dann eine „hebbare Singularität an ∞“, Polynome vom Grad $\geq$ 1 haben einen „Pol an ∞“, und transzendente Funktionen haben eine „wesentliche Singularität an ∞“.

Wir wollen nun den sogenannten Residuensatz beweisen, ein Ergebnis, das man als Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel und des Cauchyschen Integralsatzes auffassen kann. Im Weiteren werden wir den Satz nutzen, um gewisse (z. T. reelle) Integrale bequem zu berechnen. Zunächst zum Begriff des Residuums.

Definition 28.11 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann heißt

$$\operatorname{Res}(f,a) := \hat{f}_V(-1) \Big(= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r} f(\zeta) d\zeta \ \text{ für } 0 < r < R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega) \Big)$$

(wobei $V = V_{0,R}(a)$) *Residuum* von f an der Stelle a.

Beispiel 28.12 (vgl. B.28.2)
1. Hat f an a eine hebbare Singularität, so gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = 0\,.$$

2. Es sei $f(z) = 1/(z-a)^p$ für ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p > 1 \\ 1, & \text{falls } p = 1 \end{cases}\,.$$

3. Es sei

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\frac{1}{z^\nu}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f,0) = 1\,.$$

Definition 28.13 Es sei $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Pfad. Dann heißt für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, wobei $\Gamma = \gamma([\alpha,\beta])$,

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Index (oder auch *Windungszahl*) von z bzgl. γ.
Ist etwa $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ für $t \in [-\pi,\pi]$, so ist

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |z - z_0| < R \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > R \end{cases}\,.$$

Es gilt damit

Satz 28.14 *(Residuensatz)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei $A \subset G$ endlich. Ferner sei f holomorph in $G \setminus A$. Dann gilt für alle geschlossenen Pfade γ in $G \setminus A$

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{w \in A} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{Res}(f,w)\,.$$

Beweis. O. E. können wir $A \neq \emptyset$ annehmen (für $A = \emptyset$ ergibt sich der CIS).
Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(w) \subset G$ für alle $w \in A$ und

$$|w - \tilde{w}| > \delta$$

für alle $w, \tilde{w} \in A, w \neq \tilde{w}$ gilt. Dann hat f für alle $w \in A$ nach S.27.15 in $V(w) := V_{0,\delta}(w)$ eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(\nu)(z-w)^\nu$$

in $V_{0,\delta}(w)$. Der Hauptteil

$$h_w(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(-\nu)(z-w)^{-\nu}$$

konvergiert dann gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ (vgl. B. 27.12). Also folgt für $w \in A$

$$\begin{aligned}\int_\gamma h_w(z)dz &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(-\nu) \int_\gamma \frac{dz}{(z-w)^\nu} \\ &= \hat{f}_{V(w)}(-1) \cdot 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(w) = 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{Res}(f,w)\,.\end{aligned}$$

(Man beachte dabei: Für $\nu > 1$ ist $z \mapsto (z-w)^{1-\nu}/(1-\nu)$ eine Stammfunktion zu $z \mapsto (z-w)^{-\nu}$ in $\mathbb{C} \setminus \{w\}$, also ist $\int_\gamma (z-w)^{-\nu} dz = 0$ nach S.25.16.)

Die Funktion $g : G \setminus A \to \mathbb{C}$

$$g(z) := f(z) - \sum_{w \in A} h_w(z) \qquad (z \in G \setminus A)$$

ist holomorph in $G \setminus A$, und für $w \in A$ gilt in $V(w)$

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_{V(w)}(\nu)(z-w)^\nu - \sum_{\substack{\tilde{w} \in A \\ w \neq \tilde{w}}} h_{\tilde{w}}(z)\,.$$

Da die rechte Seite holomorph in $U_\delta(w)$ ist, hat g an w eine hebbare Singularität. Also ist g holomorph fortsetzbar nach G. Damit gilt, da G sternförmig ist,

$$\int_\gamma g = 0$$

nach dem CIS. Folglich ist

$$0 = \int_\gamma f - \sum_{w \in A} \int_\gamma h_w = \int_\gamma f - 2\pi i \sum_{w \in A} \operatorname{ind}_\gamma(w) \cdot \operatorname{Res}(f,w)\,.$$

□

Bemerkung 28.15 Der Residuensatz kann als Verallgemeinerung des CIS und der CIF aufgefasst werden:
Ist f holomorph in G und $A = \emptyset$, so gilt (mit $\sum\limits_{\emptyset} = 0$)

$$\int\limits_{\gamma} f = 0$$

für alle geschlossenen Pfade γ in G, also die Aussage des CIS.
Ist $z \in G$ und $A = \{z\}$, so hat die Funktion $g : G \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \qquad (\zeta \in G \setminus \{z\})$$

an der Stelle z eine isolierte Singularität. Es gilt dabei

$$g(\zeta) = \sum_{\nu=-1}^{\infty} \frac{f^{(\nu+1)}(z)}{(\nu+1)!} (\zeta - z)^{\nu}$$

für $|\zeta - z|$ genügend klein, also $\mathrm{Res}(g, z) = f(z)$. Damit erhalten wir aus S.28.14 für alle geschlossenen Pfade γ in $G \setminus \{z\}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} g(\zeta) d\zeta \;=\; \mathrm{ind}_{\gamma}(z) \cdot \mathrm{Res}(g, z) \;=\; \mathrm{ind}_{\gamma}(z) \cdot f(z)\,,$$

also die *Cauchysche Integralformel für beliebige geschlossene Pfade.*
Ist dabei speziell $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ $(t \in [-\pi, \pi])$ mit $z_0 \in G$ und $R < \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$, so ergibt sich wieder die CIF für Kreise (vgl. S. 26.2).

Um den Residuensatz anwenden zu können, ist es wichtig, Techniken zur Berechnung von Residuen zur Verfügung zu haben. Für Pole gilt:

Satz 28.16 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.*

1. *Hat f an a einen Pol der Ordnung p, so ist $\varphi(z) := (z - a)^p f(z)$ holomorph fortsetzbar nach Ω, und es gilt*

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \big((z - a)^p f(z)\big)\,.$$

2. *Existieren eine offene Umgebung U von a und Funktionen $g, h \in H(U)$ mit $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und $f = g/h$ in $U \setminus \{a\}$, so gilt*

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Beweis. 1. Es gilt nach für $z \in V := V_{0,R}(a)$, wobei $U_R(a) \subset \Omega$,

$$\varphi(z) = (z-a)^p f(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} \hat{f}_V(\nu)(z-a)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_V(\nu-p)(z-a)^{\nu}\,.$$

Also ist nach S. 12.3 (da die rechte Seite holomorph in $U_R(a)$ ist)

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\big((z-a)^p f(z)\big)\,.$$

2. Nach Voraussetzung hat h/g eine Nullstelle der Ordnung 1 an a, also hat f einen Pol der Ordnung 1 an a. Nach 1. ist

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to a} g(z) \lim_{z\to a} \frac{1}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

□

Beispiel 28.17 1. Es sei $f(z) = \cot z = \cos z/\sin z$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$. Dann gilt mit $g(z) = \cos z, h(z) = \sin z$ nach S.28.16.2

$$g(k\pi) = (-1)^k, \qquad h(k\pi) = 0, \qquad h'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

und damit

$$\operatorname{Res}(f,k\pi) = \frac{g(k\pi)}{h'(k\pi)} = 1 \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

2. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm i\})$. Dann gilt mit $g(z) = 1$, $h(z) = 1+z^2$ nach S.28.16.2

$$\operatorname{Res}(f,\pm i) = \pm\frac{1}{2i} = \mp\frac{i}{2}\,.$$

Dies sieht man auch leicht direkt mittels Partialbruchzerlebung: Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i}\,,$$

also

$$\operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=1} f(z)dz = -\frac{i}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=1}\frac{dz}{z-i} = -\frac{i}{2}$$

(und entsprechend für $-i$).

3. Es sei $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ $(z \neq 0)$. Dann hat f an $\pm i$ Pole der Ordnung 2. Es gilt nach S.28.16.1

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\big((z-i)^2 f(z)\big) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{(z+i)^2}\Big) = \lim_{z\to i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}\,.$$

Wir werden uns zum Abschluss des Abscnittes noch etwas mit der Windungszahl beschäftigen. Vorbereitend gibt es eine Definition aud der Topologie.

Bemerkung und Definition 28.18 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$. Für $x \in M$ heißt

$$Z_M(x) := \bigcup \{A \subset M : x \in A, A \text{ zusammenhängend}\}$$

(Zusammenhangs-)Komponente von M (bezüglich x). Man sieht leicht ([Ü]): $Z_M(x)$ ist zusammenhängend, und für $x, y \in M$ gilt entweder $Z_M(x) = Z_M(y)$ oder $Z_M(x) \cap Z_M(y) = \emptyset$. Außerdem ist bei offenen Mengen auch jede Komponente offen.
Ist speziell $\Omega \subset \mathbb{K}^d$ offen, so existieren höchstens abzählbar viele paarweise disjunkte Komponenten $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Ω mit

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

([Ü]). Die G_α sind dann jeweils Gebiete.
Schließlich gilt: Ist $K \subset \mathbb{K}^d$ kompakt, so hat die offene Menge $\mathbb{C} \setminus K$ genau eine unbeschränkte Komponente (nämlich die, die $\{z : |z| > \sup\{|\zeta| : \zeta \in K\}\}$ enthält).

Satz 28.19 *Es sei* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *ein geschlossener Pfad, und es sei* $\Gamma := \gamma([\alpha, \beta])$. *Dann ist* $\operatorname{ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus \Gamma) \subset \mathbb{Z}$. *Außerdem gilt* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv \text{const}$ *auf jeder Komponente von* $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ *und* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ *auf der unbeschränkten Komponente von* $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Beweis. 1. Es gilt

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma).$$

Also ist $\operatorname{ind}_\gamma$ nach S.26.6 analytisch in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Für $w \in \mathbb{C}$ sieht man leicht ([Ü]), dass $w/2\pi i \in \mathbb{Z}$ äquivalent ist zu $e^w = 1$. Also ist die Aussage, dass $\operatorname{ind}_\gamma$ ganzzahlige Werte hat, äquivalent dazu $\varphi = \varphi_z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) := \exp\Big(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\Big) \qquad (t \in [\alpha, \beta])$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ die Bedingung $\varphi(\beta) = 1$ erfüllt.
Die stetige Funktion $\varphi/(\gamma - z)$ ist eine Stammfunktion zu

$$\frac{\varphi'(\gamma - z) - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} \quad \text{auf } [\alpha, \beta]$$

Weiter gilt
$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} \, ,$$
also auch
$$\varphi'(t)(\gamma(t)-z) - \varphi(t)\gamma'(t) = 0$$
für alle $t \in [\alpha, \beta]$ bis auf eine endliche Ausnahmemenge. Hieraus folgt, dass eine Konstante c existiert mit
$$\varphi(t) = c(\gamma(t)-z) \qquad \text{auf } [\alpha, \beta] \, .$$
Aus $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ ergibt sich
$$\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) = 1 \, .$$

2. Es sei G eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Da G zusammenhängend und $\operatorname{ind}_\gamma$ stetig und ganzzahlig auf G ist, ist $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv \text{const}$ in G nach S.22.14.
Da Γ kompakt ist, existiert $R := \max\limits_{\zeta \in \Gamma} |\zeta|$. Es gilt für $|z| > R$
$$|\operatorname{ind}_\gamma(z)| \leq \frac{1}{|z|-R} \frac{L(\gamma)}{2\pi} \, .$$
Also ist $|\operatorname{ind}_\gamma(z)| < 1$ für $|z|$ genügend groß. Da $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv \text{const}$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ ist, ist $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ dort. □

Bemerkung und Definition 28.20 Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Pfad. Dann heißt γ *einfach geschlossen*, falls $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, wobei $\Gamma := \gamma([\alpha, \beta])$, nur zwei Komponenten hat (d.h. nur eine beschränkte Komponente; vgl. B/D.28.18), und falls $|\operatorname{ind}_\gamma(z)| = 1$ in der beschränkten Komponente gilt. Dann nennen wir die unbeschränkte Komponente das *Außengebiet* $\operatorname{Ext}(\Gamma)$ und die beschränkte Komponente das *Innengebiet* $\operatorname{Int}(\Gamma)$. Außerdem sagen wir, γ sei *positiv orientiert*, falls $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$ gilt.
Für positiv orientierte, einfach geschlossene Pfade γ in $G \setminus A$ ergibt sich unter den Voraussetzungen von S. 28.14
$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{w \in A \cup \operatorname{Int}(\Gamma)} \operatorname{Res}(f, w) \, , \tag{28.1}$$
d. h. das Integral summiert die Residuen im Innengebiet von Γ (bis auf den Faktor $2\pi i$).

Beispiel 28.21 Wir betrachten $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit
$$\gamma(t) := \begin{cases} R + t\,2R/\pi, & \text{falls } t \in [-\pi, 0] \\ Re^{it}, & \text{falls } t \in [o, \pi] \end{cases} \, .$$

Dann ist γ einfach geschlossen und positiv orientiert, also

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z \in \operatorname{Int}(\Gamma) \\ 0, & \text{falls } z \in \operatorname{Ext}(\Gamma) \end{cases} .$$

(Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$. Wir setzen $\gamma_1 := \gamma_{|[-\pi,0]}$, $\gamma_2 := \gamma_{|[0,\pi]}$ und $\tilde{\gamma}(t) := Re^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$ sowie $\tilde{\gamma}_1 := \tilde{\gamma}_{|[-\pi,0]}$. Da $\zeta \mapsto \dfrac{1}{\zeta - z}$ holomorph im konvexen Gebiet $\{\zeta : \operatorname{Im}(\zeta) < \operatorname{Im}(z)\}$ ist, existiert **dort** eine Stammfunktion (S. 25.7) und damit gilt nach S. 25.16

$$\int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} .$$

Hieraus folgt

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \left(\int_{\tilde{\gamma}_1} + \int_{\gamma_2} \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i .$$

Offensichtlich hat $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ höchstens zwei Komponenten. Da der Index in der unbeschränkten Komponente verschwindet, existieren tatsächlich genau zwei.)

29 Anwendungen des Residuensatzes

Wir werden nun zeigen, dass man den Residuensatz insbesondere dafür nutzen kann, uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

zu berechnen.

Satz 29.1 *Es sei $E := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, und es sei $A \subset E^0$ endlich. Ferner sei $f \in H(G \setminus A)$, wobei G ein konvexes Gebiet mit $E \subset G$ ist, und so, dass Konstanten $R_0, M > 0$ und $\alpha > 1$ existieren mit*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha} \qquad (z \in E, |z| \geq R_0)\,.$$

Dann existiert $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; 2\pi i \sum_{w \in A} \mathrm{Res}(f, w)\,.$$

Beweis. Zunächst folgt aus $|f(x)| \leq M/|x|^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}, |x| \geq R_0$ und der Existenz der Integrale $\int\limits_1^\infty dx/x^\alpha$ und $\int\limits_{-\infty}^{-1} dx/|x|^\alpha$ auch die Existenz der Integrale $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ und $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx$ nach S.14.4 und S. 14.5 (man beachte dabei: f ist stetig auf $\mathbb{R}$, also existiert $\int\limits_{-R_0}^{R_0} f(x)dx$).

O.E. können wir davon ausgehen, dass $|w| < R_0$ für alle $w \in A$ gilt. Für $R \geq R_0$ betrachten wir den Pfad $\gamma = \gamma^{(R)}$ aus B. 28.21. Dann folgt aus (28.1)

$$\int_{\gamma^{(R)}} f = 2\pi i \sum_{w \in A} \mathrm{Res}(f, w) \qquad \text{für alle } R \geq R_0.$$

Weiter gilt

$$\int_{\gamma_1^{(R)}} f = \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

und

$$\Big| \int_{\gamma_2^{(R)}} f(z)dz \Big| \leq \frac{M}{R^\alpha} \cdot \pi R \;=\; \frac{M\pi}{R^{\alpha-1}} \;\to\; 0 \qquad (R \to \infty)\,.$$

Also erhalten wir

$$\int_{-R}^{R} f = \int_{\gamma^{(R)}} f - \int_{\gamma_2^{(R)}} f = 2\pi i \sum_{w\in A} \mathrm{Res}(f,w) - \int_{\gamma_2^{(R)}} f \to 2\pi i \sum_{w\in A} \mathrm{Res}(f,w)$$

für $R \to \infty$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 29.2 Insbesondere lässt sich S.29.1 bei Integranden der Form

$$f(x) = e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)} = \cos(ax)\frac{P(x)}{Q(x)} + i\,\sin(ax)\frac{P(x)}{Q(x)}$$

anwenden, wobei $a \geq 0$ ist und wobei P und Q Polynome sind mit $\deg(Q) \geq \deg(P)+2$ und $Q(x) \neq 0\,(x \in \mathbb{R})$.
(Denn: Es sei

$$A := Z(Q) \cap E^0$$

die Menge der Nullstellen von Q in der oberen Halbebene E^0. Dann ist

$$f(z) := e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}$$

holomorph in $G_\delta \setminus A$, für $G_\delta := \{z : \mathrm{Im}(z) > -\delta\}$ mit einem $\delta > 0$. Außerdem gilt für $\mathrm{Im}(z) \geq 0, z = x + iy$ mit einem $M > 0$

$$|f(z)| = \underbrace{e^{-ay}}_{\leq 1}\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{M}{|z|^2}$$

für $|z|$ genügend groß. Damit sind alle Voraussetzungen von S.29.1 erfüllt.)

Beispiel 29.3 Für $a > 0$ sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\})\,.$$

Dann ist f wie in B. 29.2. Also gilt nach S.29.1 (man beachte, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ax)/(1+x^2) = 0$$

gilt, da der Integrand ungerade ist)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f,i)\,.$$

Weiter ist (etwa nach S.28.16.2)

$$\operatorname{Res}(f,i) = \frac{e^{iaz}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2i}\,,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-a}\,.$$

Eine weitere interessante Klasse von Integralen, die mittels des Residuensatzes oft leicht berechnet werden können, sind Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t)dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^{2\pi} R(\sin t)dt\,.$$

wobei R eine rationale Funktion ist. Beachtet man, dass

$$\cos t = \frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big)\,, \qquad \sin t = \frac{1}{2i}\big(z-\frac{1}{z}\big)$$

für $z = e^{it}$ gilt, so ergibt sich mit

$$R^*(z) = \frac{1}{z}\,R\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big)\Big) \qquad \text{bzw.} \qquad R^{**}(z) = \frac{1}{z}\,R\Big(\frac{1}{2i}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big)$$

dabei (falls R^* bzw. R^{**} stetig auf $|z|=1$ sind)

$$\int_{|z|=1} R^*(z)dz \;=\; i\int_{|z|=1} R\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big)\Big)\frac{dz}{iz} \;=\; i\int_0^{2\pi} R(\cos t)dt \tag{29.1}$$

bzw.

$$\int_{|z|=1} R^{**}(z)dz \;=\; i\int_{|z|=1} R\Big(\frac{1}{2i}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big)\frac{dz}{iz} \;=\; i\int_0^{2\pi} R(\sin t)dt \tag{29.2}$$

Dies beweist schon im Wesentlichen folgenden

Satz 29.4 *Es sei R eine rationale Funktion.*

1. *Ist*

$$R^*(z) := \frac{1}{z}R\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big)\Big)$$

holomorph in $\mathbb{D}_r \setminus A^*$ für eine endliche Menge $A^* \subset \mathbb{D}$ und ein $r > 1$, so gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t)dt = 2\pi \sum_{w\in A^*} \operatorname{Res}(R^*, w)\,.$$

2. Ist

$$R^{**}(z) := \frac{1}{z} R\Big(\frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)\Big)$$

holomorph in $\mathbb{D}_r \setminus A^{**}$ *für eine endliche Menge* $A^{**} \subset \mathbb{D}$ *und ein* $r > 1$, *so folgt*

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t)dt = 2\pi \sum_{w \in A^{**}} \operatorname{Res}(R^{**}, w)\,.$$

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus (29.1) bzw. (29.2) und dem Residuensatz, angewandt auf R^* bzw. R^{**} und $G = U_\delta(0)$ sowie $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). □

Beispiel 29.5 1. Für $0 < \rho < 1$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}\,.$$

Ist

$$R(\cos t) = \frac{1}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}$$

und

$$R^*(z) = \frac{1}{z} R\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\Big) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \rho(z + 1/z) + \rho^2} = \frac{1}{(z-\rho)(1-\rho z)}\,,$$

so hat R^* die beiden einfachen Pole $\rho < 1$ und $1/\rho > 1$. Also gilt nach S.29.4 und S.28.16.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} = 2\pi \cdot \operatorname{Res}(R^*, \rho) = 2\pi \cdot \frac{1}{1 - \rho z}_{|z=\rho} = \frac{2\pi}{1 - \rho^2}\,.$$

[Für die Funktion

$$P(\rho, t) := \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} \quad (0 < \rho < 1, 0 \le t \le 2\pi)$$

folgt also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, t)dt = 1$$

für alle r. Diese Funktion, der sogenannte Poisson-Kern, spielt eine wichtige Rolle in der Theorie harmonischer Funktionen; siehe Abschnitt 31]

2. Für $p \in N$ und $a > 1$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^p} \, .$$

Hier ist

$$R(\cos t) = \frac{1}{(a+\cos t)^p} \, ,$$

also

$$R^*(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(a+(z+1/z)/2)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z^2+2az+1)^p} = \frac{2^p z^{p-1}}{(z-w_1)^p (z-w_2)^p}$$

mit $w_1 = -a + \sqrt{a^2-1} \in (-1,0)$ und $w_2 = -a - \sqrt{a^2-1} < -1$.
Also ergibt sich aus S.29.4 und S.28.16.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^p} = 2\pi \cdot \mathrm{Res}(R^*, w_1) = \frac{2\pi}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left(\frac{2^p z^{p-1}}{(z-w_2)^p} \right)_{|z=w_1} .$$

Für $p = 1$ erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = 2\pi \cdot \frac{2}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \, ,$$

und für $p = 2$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{(a+\cos t)^2} &= 2\pi \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4z}{(z-w_2)^2} \right)_{|z=w_1} \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{-w_1-w_2}{(w_1-w_2)^3} = \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-1}^3} \, . \end{aligned}$$

Wir kommen zum Schluss dieses Abschnittes zu zwei interessanten funktionentheoretischen Anwendungen des Residuensatzes.

Definition 29.6 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt *meromorph* in Ω, falls eine Menge $A \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω existiert mit $f \in H(\Omega \setminus A)$ und so, dass f an den Stellen $a \in A$ (falls $A \neq \emptyset$) Pole hat.

Bemerkung 29.7 1. Ist $f \in H(\Omega)$, so ist f auch meromorph in Ω (da $A = \emptyset$ zulässig ist).
2. Es sei

$$S^2 := \left\{ s = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \left| s - (0,0,\frac{1}{2}) \right| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Dann ist durch

$$P(z) := P(x+iy) := \frac{1}{|z|^2+1}\,(x, y, |z|^2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ definiert (die so genannte stereographische Projektion).
Setzt man

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad P(\infty) := (0,0,1),$$

so ist $P : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ bijektiv, und durch

$$d(z,w) := |P(z) - P(w)| \qquad (z, w \in \mathbb{C}_\infty)$$

wird (C_∞, d) ein kompakter metrischer Raum (die so genannte Riemannsche Zahlenkugel).
Dabei gilt $d(z,\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$ für $z \neq \infty$, also ergibt sich für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$

$$d(z_n, \infty) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

genau dann, wenn $|z_n| \to \infty\,(n \to \infty)$. Ist also f meromorph in Ω, so kann f durch $f(a) := \infty$ für alle a aus der Polstellenmenge A zu einer stetigen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ fortgesetzt werden.
(Man beachte: Nach S. 28.5 gilt in $(\mathbb{C}_\infty, d)$

$$f(z) \to \infty \qquad (z \to a)$$

für alle Pole a von f.)

Beispiel 29.8 1. Die Funktionen cot und tan sind meromorph in $\mathbb{C}$, denn mit $A = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt: $\cot \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ und cot hat an den Stellen $a \in A$ Pole (1. Ordnung). Entsprechendes gilt für tan mit $\tilde{A} = \{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (vgl. B. 28.6). Man beachte dabei: A bzw. $\tilde{A}$ haben keine Häufungspunkte in $\mathbb{C}$.
2. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus (\{1/(k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}) \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)} \qquad \left(z \neq \frac{1}{k\pi}, z \neq 0\right).$$

Dann ist f meromorph in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (mit Polstellenmenge $A = \{1/(k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$), jedoch nicht in $\mathbb{C}$ (da 0 ein Häufungspunkt von A ist).

Als Folgerung aus dem Residuensatz erhalten wir

Satz 29.9 *(Argumentprinzip)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es sei f meromorph in G. Ferner seien $Z(f) := \{$Nullstellen von f in $G\}$ und $P(f) := \{$Polstellen von f in $G\}$endlich. Ist γ ein geschlossener Pfad in $G \setminus (Z(f) \cup P(f))$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w\in Z(f)} \operatorname{ind}_\gamma(w)\cdot n(w) - \sum_{w\in P(f)} \operatorname{ind}_\gamma(w)\cdot p(w)\,,$$

wobei $n(w) = n_f(w)$ die Ordnung der Nullstelle w von f und $p(w) = p_f(w)$ die Ordnung der Polstelle w von f bezeichnet.

Beweis. 1. Ist a eine Nullstelle von f der Ordnung $n(a)$, so existiert eine in einer offenen Umgebung U von a holomorphe Funktion g mit $g(z) \neq 0$ in U und

$$f(z) = (z-a)^{n(a)}g(z) \qquad (z \in U)\,.$$

Also folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(a)}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{in } U\setminus\{a\}\,.$$

d.h. f'/f hat an a einen Pol der Ordnung 1, und es gilt

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f'}{f}, a\Big) = n(a)\,.$$

2. Ist a ein Pol der Ordnung $p(a)$ von f, so existiert ein in einer Umgebung U von a holomorphe Funktion g mit $g(z) \neq 0$ in U und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^{p(a)}} \qquad (z \in U\setminus\{a\})\,.$$

Aus

$$f'(z) = g'(z)\cdot\frac{1}{(z-a)^{p(a)}} + g(z)\cdot\frac{-p(a)}{(z-a)^{p(a)+1}} \qquad (z \in U\setminus\{a\})$$

folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{p(a)}{z-a} \qquad (z\in U\setminus\{a\})\,,$$

d.h. f'/f hat wieder einen Pol 1. Ordnung an a mit

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{f'}{f}, a\Big) = -p(a)\,.$$

3. Ist γ ein geschlossener Pfad in $G\setminus(Z(f)\cup P(f))$, so gilt nach S. 28.14 und 1. und 2.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{w\in Z(f)} \operatorname{ind}_\gamma(w)\cdot n(w) - \sum_{w\in P(f)} \operatorname{ind}_\gamma(w)\cdot p(w)\,. \qquad \square$$

Bemerkung 29.10 Für positiv orientierte, einfach geschlossene Pfade γ in $G\setminus(Z(f)\cup P(f))$ ergibt sich unter den Voraussetzungen von S. 29.9

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'}{f} = \sum_{w\in Z(f)\cap \mathrm{Int}(\Gamma)} n(w) - \sum_{w\in P(f)\cap \mathrm{Int}(\Gamma)} p(w)\,. \tag{29.3}$$

d.h. das Integral auf der linken Seite gibt die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Polstellen von f in $\mathrm{Int}(\Gamma)$ (inkl. Vielfachheiten) an.
Ist unter den Voraussetzungen von S. 29.9 zusätzlich f holomorph in G (m. a. W. $P(f)=\emptyset$) und ist γ ein positiv orientierter, einfach geschlossener Pfad in $G\setminus Z(f)$, so erhalten wir aus (29.3)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'}{f} = \sum_{w\in Z(f)\cap \mathrm{Int}(\Gamma)} n(w)\,. \tag{29.4}$$

d.h. das Integral auf der linken Seite „zählt“ die Nullstellen von f in $\mathrm{Int}(\Gamma)$ (inkl. Vielfachheiten).

Als Folgerung aus dem Argument-Prinzip (bzw. (29.4)) erhalten wir

Satz 29.11 *(Rouché)*
Es sei $G\subset\mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es seien $f,g\in H(G)$ so, dass $Z(f)$ und $Z(g)$ endlich sind. Ferner sei γ ein einfach geschlossener Pfad in G so, dass

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)| \quad \text{für alle } z\in\Gamma\,.$$

Dann haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in Int(γ) (incl. Vielfachheiten), d. h.

$$\sum_{w\in Z(f)\cap \mathrm{Int}(\Gamma)} n_f(w) = \sum_{w\in Z(g)\cap \mathrm{Int}(\Gamma)} n_g(w)\,.$$

Beweis. O. E. sei γ positiv orientiert (ansonsten untersuche man γ^-). Für $t\in[0,1]$ betrachten wir die Funktionen $\varphi_t\in H(G)$ mit

$$\varphi_t := f-t(f-g) = f-th$$

mit $h:=f-g$. Für $z\in\Gamma$ gilt

$$|\varphi_t(z)|\geq|f(z)|-t|h(z)|\geq|f(z)|-|h(z)|>0\,,$$

so dass φ_t auf Γ keine Nullstellen hat. Nach (29.4) gilt für $t\in[0,1]$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi_t'(z)}{\varphi_t(z)}dz = \sum_{w\in Z(\varphi_t)\cap \mathrm{Int}(\Gamma)} n_{\varphi_t}(w) =: N(t)\,.$$

Die Funktion $N : [0,1] \to \mathbb{N}_0$ ist stetig.
(Denn: Sind $t_1, t_2 \in [0,1]$, so gilt

$$\left|2\pi i\big(N(t_2) - N(t_1)\big)\right| = \Big|\int_\gamma \frac{(t_2 - t_1)(f'h - fh')}{(f - t_1 h)(f - t_2 h)}\Big| \le |t_2 - t_1| \left\|\frac{fh' - f'h}{(|f| - |h|)^2}\right\|_{\infty,\Gamma} L(\gamma)\,.$$

Dies zeigt die (Lipschitz-)Stetigkeit von N.)
Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, ist $N(t) \equiv \text{const}$ auf $[0,1]$, also insbesondere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = N(1) = N(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz\,,$$

d.h.

$$\sum_{w \in Z(g)\cap \mathrm{Int}(\Gamma)} n_g(w) \;=\; \sum_{w \in Z(f)\cap \mathrm{Int}(\Gamma)} n_f(w)\,.$$

□

Wir geben einige typische Anwendungsbeispiele zum Satz von Rouché.

Beispiel 29.12 1. Wir beweisen noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra. Also: Es sei $P(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum\limits_{w \in Z(P)} n(w) = n$, d.h. P hat n Nullstellen inkl. Vielfachheiten.
(Denn: Ist $Q(z) := a_n z^n$, so gilt für R genügend groß

$$|P(z) - Q(z)| \;=\; \Big|\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu\Big| \;<\; |a_n z^n| \;=\; |Q(z)| \qquad (|z| = R)\,.$$

Also ergibt sich aus S. 29.11 (mit $\gamma(t) = \mathrm{R}e^{it}$)

$$\sum_{w \in Z(P)\cap U_R(0)} n_P(w) \;=\; \sum_{w \in Z(Q)\cap U_R(0)} n_Q(w) \;=\; n_Q(0) = n\,.)$$

2. Wir betrachten die (transzendente) Gleichung

$$e^z \;=\; 1 + 2z\,.$$

Wir suchen alle Lösungen in $\mathbb{D}$. Offensichtlich ist $z = 0$ eine Lösung. Mit $f(z) = 2z$ und $g(z) = 1 + 2z - e^z$ gilt für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| \;=\; |e^z - 1| \;<\; 2 = |f(z)|$$

(beachte: für $|z| \le 1$ gilt

$$|e^z - 1| \;\le\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \;=\; e^{|z|} - 1 \;\le\; e - 1 < 2\,)\,.$$

Also haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen, nämlich eine in $\mathbb{D}$. Folglich ist $z = 0$ die einzige Lösung der Gleichung in $\mathbb{D}$.

30 Folgen holomorpher Funktionen

Definition 30.1 Es seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume. Sind $f_n, f : X \to Y$, so sagt man, die Folge (f_n) sei *lokal gleichmäßig konvergent gegen f (auf X), falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf U.*

Bemerkung 30.2 Es sei (unter den Bedingungen von D. 30.1) $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf X. Dann gilt: Ist $K \subset X$ kompakt, so konvergiert (f_n) gleichmäßig auf K.
(Denn: Zu jedem $x \in X$ existiert ein $\delta = \delta(x) > 0$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $U_\delta(x)$. Da

$$K \subset \bigcup_{x \in K} U_\delta(x)$$

gilt, existieren $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_\delta(x_j)\,.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existieren $N_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (z \in U_\delta(x_j),\ n \geq N_j(\varepsilon))$$

für $j = 1, \ldots, m$. Also gilt für $n \geq N_\varepsilon := \max\limits_{j=1,\ldots,m} N_j(\varepsilon)$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in K, n \geq N_\varepsilon)\ ,$$

Wir untersuchen nun Folgen holomorpher Funktionen. Es gilt

Satz 30.3 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und es seien $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Ferner gelte $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω. Dann ist auch f holomorph in Ω, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \qquad (n \to \infty)$$

lokal gleichmäßig auf Ω.

Beweis. 1. Zunächst ist f als lokal gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ebenfalls stetig (S. 11.10).
Ist $z_0 \in \Omega$, so existiert ein $R > 0$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\overline{U_R(z_0)}$. Nach der Cauchyschen Integralformel für Kreise gilt für $z \in U_R(z_0)$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\ .$$

Also erhalten wir für $z \in U_R(z_0)$

$$\Big|f_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\Big| \le \frac{R}{R - |z - z_0|} \cdot ||f_n - f||_{\infty, K_R(z_0)} \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Damit gilt auch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \in U_R(z_0))$$

und folglich ist f analytisch in $U_R(z_0)$ nach S. 26.6 (vgl. Beweis zu 26.8).
Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt weiter für alle festen $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{|z-z_0| \le R/2} |f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| \le \frac{k! 2^{k+1}}{R^k} ||f_n - f||_{\infty, K_R(z_0)} \to 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Also gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf Ω. □

Beispiel 30.4 In B. 11.2.2 hatten wir die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert. Wir setzen nun allgemein für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$

$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z} \qquad \Big(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{e^{z \cdot \ln \nu}} \Big)\,.$$

Dann konvergieren die Teilsummen $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^z}$ lokal gleichmäßig auf $\Omega := \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ ([Ü]). Da die Teilsummen ganze Funktionen sind, ist ζ holomorph in Ω nach S. 30.3.

Bemerkung 30.5 Ist für $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen

$$A(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ analytisch in } \Omega\}\,,$$

so gilt im Falle $\Omega \subset \mathbb{C}$ nach S. 26.8

$$A(\Omega) = H(\Omega)\,.$$

Also gilt nach S. 30.3 insbesondere: Aus $f_n \in A(\Omega)$ und $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω folgt $f \in A(\Omega)$. Eine entsprechende Aussage gilt *nicht* im Falle $\Omega \subset \mathbb{R}$.
Ist etwa $\Omega = \mathbb{R}$ und ist $f \in C(\mathbb{R})$ beliebig, so existiert nach dem Weierstraßschen Approximationssatz zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom P_n mit

$$\max_{[-n,n]} |f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}\,.$$

Also konvergiert die Folge (P_n) lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen f, d.h. jede auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion ist lokal gleichmäßiger Grenzwert in $\mathbb{R}$ analytischer Funktionen.

Wir studieren zum Abschluss einige Auswirkungen des Satzes von Rouché auf Funktionenfolgen.

Satz 30.6 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und es seien $f_n \in H(G)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G und $Z(f), Z(f_n)$ endlich. Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ ein einfach geschlossener Pfad in G und ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma := \gamma([\alpha, \beta])$, so haben f und f_n für n genügend groß die gleiche Anzahl von Nullstellen (inkl. Vielfachheiten) in* $\mathrm{Int}(\Gamma)$.

Beweis. Da f stetig auf Γ ist, gilt

$$\delta := \min_{z \in \Gamma} |f(z)| > 0\,.$$

Da $\Gamma \subset G$ kompakt ist, existiert ein $N = N(\delta) > 0$ so, dass

$$\max_{z \in \Gamma} |f(z) - f_n(z)| < \delta$$

für alle $n \geq N$ gilt. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Rouché (S. 29.11).
□

Beispiel 30.7 Es sei

$$f(z) = e^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$$

Dann gilt für die n-ten Teilsummen $s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} z^\nu/\nu!$ nach S. 30.6 (angewandt mit $\gamma(t) = \mathrm{Re}^{it} (t \in [0, 2\pi])$: Es existiert ein $N = N(R)$ so, dass s_n für alle $n \geq N$ in $|z| < R$ keine Nullstelle hat (d.h. die Nullstellen, die nach dem Fundamentalsatz der Algebra ja existieren, rücken mit wachsendem n immer weiter „Richtung ∞“).

Als Folgerung aus S. 30.6 erhalten wir insbesondere

Satz 30.8 *(Hurwitz)*
Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und ist (f_n) eine Folge in Ω holomorpher Funktionen mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω und $f_n(z) \neq 0$ in Ω, so ist entweder $f \equiv 0$ in Ω oder es ist $f(z) \neq 0$ in Ω.

Beweis. Es sei $f \not\equiv 0$ in G. Angenommen, f habe eine Nullstelle z_0, etwa der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Ist $r > 0$ so, dass $f(z) \neq 0$ in $\overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ gilt, so folgt aus S. 30.6 (angewandt auf $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$), dass f_n für n genügend groß in $U_r(z_0)$ ebenfalls m Nullstellen hat. Widerspruch! □

31 Harmonische Funktionen und Dirichlet Problem

Ist $f \in C^1(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen ist, so haben wir in Abschnitt 25 gesehen, dass f genau dann holomorph in Ω ist, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

gilt, also genau dann, wenn f die homogene partielle Differenzialgleichung $\overline{\partial} f = 0$ mit

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2i}\big(i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\big) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)$$

löst. Wir betrachten jetzt Lösungen einer anderen homogenen partiellen Differenzialgleichung, der sog. Laplace-Gleichung.

Definition 31.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Eine Funktion $f \in C^2(\Omega, \mathbb{K})$ heißt *harmonisch*, falls

$$\Delta f := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 f \equiv 0 \text{ auf } \Omega$$

gilt. Wir setzen

$$\mathrm{Har}(\Omega) := \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ harmonisch}\}.$$

Wir werden uns im Folgenden auf den Fall $d = 2$ (also $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) beschränken. Hier gibt es enge Verbindungen zu holomorphen Funktionen:

Bemerkung 31.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gilt

1. $H(\Omega) \subset H(\Omega)$.

2. Ist $f \in \mathrm{Har}(\Omega)$, so ist
$$\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y} \in H(\Omega).$$

3. Ist $f = u + iv$ mit $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, so sind äquivalent

   a) $f \in \mathrm{Har}(\Omega)$,

   b) $\overline{f} \in \mathrm{Har}(\Omega)$,

   c) $u, v \in \mathrm{Har}(\Omega, \mathbb{R})$.

   Dies zeigt, dass man sich (anders als im Falle holomorpher Funktionen) im Wesentlichen auf die Untersuchung reellwertiger harmonischer Funktionen beschränken kann.

(Denn:
1. Ist f holomorph in Ω, so gilt nach S. 25.3

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x} = i f' \text{ auf } \Omega.$$

Da auch f' holomorph ist, erhält man wieder mit S. 25.3

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\,(if') = i\,\frac{\partial f'}{\partial x} = -\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

[Alternativ: Es gilt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Ist f holomorph, so gilt $\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$, also auch $\Delta f = 0$.]
2. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C^1(\Omega)$ und

$$i\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = i\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -i\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y} \in H(\Omega)$nach S. 25.3.
3. [Ü].)

Als Folgerung erhalten wir

Satz 31.3 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $u \in \mathrm{Har}(G, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:*

a) $u = \mathrm{Re} f$ *für ein* $f \in H(G)$.

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$ *hat eine Stammfunktion in* G.

In diesem Fall ist f aus a) eine Stammfunktion.

Beweis. Zunächst gilt für beliebiges $f \in H(G)$

$$\frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial x} = \mathrm{Re}\,\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{Re} f'$$

und

$$\frac{\partial\, \mathrm{Re} f}{\partial y} = \mathrm{Re}\,\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{Re}(if') = -\mathrm{Im}(f').$$

a) $\Rightarrow$ b): Ist $u = \mathrm{Re} f$, so folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{Re} f' + i\,\mathrm{Im} f' = f'.$$

b) $\Rightarrow$ a): Ist f eine Stammfunktion zu $\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$ auf G (ohne Einschränkung so, dass $\mathrm{Re} f(z_0) = u(z_0)$ für ein $z_0 \in G$), so gilt

$$\mathrm{Re} f' + i\,\mathrm{Im} f' = f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

also

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\,\mathrm{Re} f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

und damit ist $u - \mathrm{Re} f \equiv \mathrm{const} = u(z_0) - \mathrm{Re} f(z_0) = 0$. □

Bemerkung 31.4 1. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, so hat $\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \in H(G)$ nach S. 25.7 eine Stammfunktion, also ist $u = \mathrm{Re} f$ für ein $f \in H(G)$.
2. Im Allgemeinen ist nicht jede Funktion $u \in \mathrm{Har}(G, \mathbb{R})$ von der Form $u = \mathrm{Re} f$ für ein $f \in H(G)$. Ist etwa $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $u : G \to \mathbb{R}$ mit

$$u(z) := \ln|z| \qquad (z \neq 0)$$

harmonisch in G mit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0).$$

Bekanntlich hat $z \mapsto 1/z$ keine Stammfunktion in G, und damit existiert kein $f \in H(G)$ mit $u = \mathrm{Re} f$.

Satz 31.5 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $f \in \mathrm{Har}(G)$.*

1. *(Mittelwert-Formel)*

   Ist $z_0 \in G$, so gilt für alle $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt. \tag{31.1}$$

2. *(Identitätssatz)*

   Ist $g \in \mathrm{Har}(G)$ und gilt $f_{|U} = g_{|U}$ für eine offene Menge $U \subset G$, so ist $f = g$.

Beweis.
1. Es sei $u = \mathrm{Re} f$, und es sei $z_0 \in G$. Da $U_\rho(z_0)$ mit $\rho := \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$ sternförmig ist, existiert eine Funktion $h \in H\big(U_\rho(z_0)\big)$ mit $u = \mathrm{Re}\, h$ (B. 31.4). Also ergibt sich nach der Mittelwert-Formel (26.1) für $0 < r < \rho$

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\big(h(z_0)\big) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{it})\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, h(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Eine entsprechende Argumentation gilt für $\mathrm{Im} f$. Zusammensetzen liefert dann die Behauptung für f.
2. Ohne Einschränkung sei $g \equiv 0$ (ansonsten betrachte man $\tilde{f} = f - g$).
Wieder sei $u := \mathrm{Re} f$. Dann ist nach B. 31.2/3

$$h := \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \in H(G).$$

Außerdem gilt $h_{|U} = 0$ (da $f_{|U} = 0$). Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ist $h \equiv 0$ auf G, also ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{auf } G$$

und damit $u \equiv \mathrm{const}$ auf G. Aus $u(z) = 0$ auf U folgt $u \equiv 0$.
Entsprechendes gilt wieder für $\mathrm{Im} f$. □

Bemerkung 31.6 Für analytische – und damit für holomorphe – Funktionen gilt bekanntlich eine stärkere Version des Identitätssatzes (S. 26.19). Ein entsprechendes Resultat ist im Allgemeinen nicht gültig für harmonische Funktionen. So gilt etwa für $u, v \in \mathrm{Har}(\mathbb{C})$ mit

$$u(z) = \mathrm{Re}\, z, \qquad v(z) \equiv 0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

zwar für $u(z) = v(z)$ für $z \in i\mathbb{R}$, aber $u \not\equiv v$.

Definition 31.7 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ferner sei $M \subset X$ und $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Wir setzen für $x_0 \in H(M)$

$$\overline{\lim_{x \to x_0}}\, \varphi(x) := \lim_{\delta \to 0} \sup \varphi\big(M \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})\big).$$

(Man beachte dabei: Da $\delta \mapsto \sup \varphi\big(M \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x\})\big)$ monoton wachsend ist, existiert der Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.) Entsprechend definiert man

$$\underline{\lim_{x \to x_0}}\, \varphi(x) := \lim_{\delta \to 0} \inf \varphi\big(M \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})\big).$$

Satz 31.8 *(Maximum-Prinzip)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gilt:

1. *Hat u ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, so ist $u \equiv \mathrm{const}$.*

2. *Ist G beschränkt und ist für $\zeta \in \partial G$*

$$u^*(\zeta) := \overline{\lim_{z \to \zeta}}\, u(z), \qquad u_*(\zeta) := \underline{\lim_{z \to \zeta}}\, u(\zeta),$$

so existieren $w^*, w_* \in \partial G$ mit

$$u^*(w^*) = \sup u(G), \qquad u_*(w_*) = \inf u(G).$$

Beweis.
1. Wie im Beweis zu S. 26.21 sieht man unter Verwendung der Mittelwert-Formel (31.1): Hat u ein lokales Maximum an $z_0 \in G$, so gilt $u(z) = u(z_0)$ auf $U_r(z_0)$ für ein $r > 0$. Nach S. 31.5.2 ist dann $u(z) \equiv u(z_0)$ auf G.
Da mit u auch $-u$ harmonisch ist, gilt dies auch im Falle der Existenz eines lokalen Minimums.
2. Es sei

$$M := \sup u(G) \ (\in (-\infty, \infty]).$$

Dann existiert eine Folge (z_n) in G mit $u(z_n) \to M$ $(n \to \infty)$. Da $\overline{G}$ kompakt ist, kann man ohne Einschränkung $z_n \to \zeta \in \overline{G}$ annehmen.
Ist $\zeta \in G$, so gilt $u(z_n) \to u(\zeta)$ $(n \to \infty)$, also $M = u(\zeta)$ $(< \infty)$.
Nach 1. ist dann $u(z) \equiv c$ auf G, und damit ist auch $u^* \equiv c$. Also ist jedes $w^* \in \partial G$ wie gewünscht.
Ist $\zeta \in \partial G$, so gilt mit $\delta_n := 2|z_n - \zeta|$

$$M \leftarrow u(z_n) \le \sup \big(G \cap (U_{\delta_n}(\zeta) \setminus \{\zeta\})\big) \le M,$$

also $M = \overline{\lim\limits_{z \to \zeta}} u(z) = u^*(\zeta)$. Damit ist $w^* = \zeta$ geeignet.
Entsprechendes gilt für u_*. □

Bemerkung 31.9 Ist G sei beschränktes Gebiet und ist $f \in C(\overline{G})$ harmonisch in G, so folgt aus $f_{|\partial G} = 0$ schon $f \equiv 0$.
(Denn: Ist $u := \operatorname{Re} f$, so ist $u^* = u_* = 0$. Damit ist nach S. 31.8.2 auch $u = 0$ auf G Entsprechendes gilt für $\operatorname{Im} f$.)

Eine der zentralen Fragestellungen ist die nach der „harmonischen Fortsetzbarkeit“ stetiger Funktionen.

Definition 31.10 Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, und es sei $\varphi : \partial G \to K$ stetig. Unter dem Dirichlet-Problem $D(G, \varphi)$ versteht man die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Funktionen $f \in C(\overline{G})$ mit

$$\Delta f = 0 \quad \text{auf } G$$

und

$$f_{|\partial G} = \varphi$$

(also f harmonisch in G mit Randwerten φ).

Wir betrachten wieder nur den Fall $d = 2$. Die Frage der Eindeutigkeit lässt sich – jedenfalls für beschränkte Gebiete – leicht klären.

Satz 31.11 *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, so existiert für alle $\varphi \in C(\partial G)$ höchstens eine Lösung von $D(G, \varphi)$.*

Beweis. Es seien f_1, f_2 Lösungen. Dann ist $f_1 - f_2 \in C(\overline{G}), f_1 - f_2 \in \mathrm{Har}(G)$ und $(f_1 - f_2)_{|\partial G} = 0$. Also ist $f_1 - f_2 \equiv 0$ auf G nach B. 31.9. □

Bei der Suche nach Lösungen werden wir (aus Zeitgründen) sehr bescheiden. Wir betrachten speziell den Fall $G = \mathbb{D}$. Wie könnte eine Lösung aussehen?
Wir betrachten eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{K}$ mit

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \le 1 \quad \text{und} \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_{-\nu}|} \le 1 \,.$$

Dann haben die beiden Potenzreihen

$$\Phi^+(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

und

$$\Phi^-(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{a_{-\nu}}\, z^\nu$$

Konvergenzradius ≥ 1, d.h. es gilt $\Phi^+, \Phi^- \in H(\mathbb{D})$. Setzt man

$$\Phi := \Phi^+ + \overline{\Phi^-},$$

so ist $\Phi \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$ nach B. 31.2, und es gilt

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \overline{z}^\nu \qquad (z \in \mathbb{D})$$

mit gleichmäßiger Konvergenz der Reihen auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$.
Konvergiert die Reihe

$$\varphi(w) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \overline{w}^\nu$$

für gewisse $w \in S = \partial\mathbb{D}$, so kann man zumindest die Hoffnung hegen, dass für solche w gilt

$$\Phi(z) \to \varphi(w) \qquad (z \to w).$$

Dies wollen wir genauer untersuchen.

Bemerkung und Definition 31.12 1. Wir setzen

$$R(S) := R(S, \mathbb{K}) := \left\{\varphi : S \to \mathbb{K} : t \mapsto \varphi(e^{it}) \in R[-\pi, \pi]\right\}$$

und betrachten – etwas allgemeiner als früher – für $\varphi \in R(S)$ die (formale) Fourier-Reihe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\nu)w^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \hat{\varphi}(\nu)w^\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \hat{\varphi}(-\nu)\overline{w}^\nu$ mit

$$\hat{\varphi}(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_S \varphi(\zeta)\overline{\zeta}^\nu |d\zeta| := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it})e^{-i\nu t}dt.$$

Es gilt dabei

$$\left|\hat{\varphi}(\nu)\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi(e^{it})\right|dt \qquad (\nu \in \mathbb{Z}),$$

d.h. die Folge $\left(\hat{\varphi}(\nu)\right)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ ist beschränkt.

2. Es seien $f \in C(\mathbb{D})$ und $g \in R(S)$. Dann setzen wir

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi}\int_S f(z\overline{\zeta})g(\zeta)|d\zeta| \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

(Man beachte: Für $z \in \mathbb{D}$ fest ist

$$t \mapsto f(ze^{-it})g(e^{it}) \in R[-\pi, \pi],$$

also existiert das Integral.)

Weiter betrachten wir $P : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^\nu.$$

Dann ist $P \in \operatorname{Har}(\mathbb{D})$ (nach obigen Überlegungnen mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$), und es gilt für $\varphi \in R(S)$ und für $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}(P * \varphi)(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_S \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu\overline{\zeta}^\nu\right)\varphi(\zeta)|d\zeta| + \frac{1}{2\pi}\int_S \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^\nu\zeta^\nu\right)\varphi(\zeta)|d\zeta| \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu\hat{\varphi}(\nu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^\nu\hat{\varphi}(-\nu)\end{aligned} \tag{31.2}$$

(da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu\overline{\zeta}^\nu$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{z}^\nu\zeta^\nu$ gleichmäßig auf S konvergieren.)

Wie oben gesehen ist damit auch $P * \varphi \in \operatorname{Har}(\mathbb{D})$.

Satz 31.13 *Es sei $\varphi \in R(S)$. Ist φ stetig an $w \in S$, so ist*

$$\lim_{z\to w}(P * \varphi)(z) = \varphi(w).$$

Insbesondere ist im Falle $\varphi \in C(S)$ die Funktion $P * \varphi$ Lösung des Dirichlet-Problems $D(\mathbb{D}, \varphi)$.

Beweis.

1. Es gilt zunächst

(i) $P(z) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \qquad (z \in \mathbb{D})$,

(ii) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_S P(z\overline{\zeta})|d\zeta| = 1 \qquad (z \in \mathbb{D})$,

(iii) Für alle $w \in S$ und $\delta > 0$ gilt $\displaystyle\lim_{z\to w} \sup_{|\zeta - w|\geq\delta} P(z\overline{\zeta}) = 0$.

Zu (i): Für $z \in \mathbb{D}$ ist

$$P(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1-\overline{z}+\overline{z}(1-z)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0.$$

Zu (ii): Es gilt mit $\varphi(z) \equiv 1$ und (31.2) (da $\hat{\varphi}(\nu) = \delta_{0,\nu}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})|d\zeta| = (P * \varphi)(z) \equiv 1.$$

Zu (iii): Ist $|z-w| < \delta/2$, so folgt für alle ζ mit $|\zeta - w| \geq \delta$

$$P(z\overline{\zeta}) = \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{1-|z|^2}{(|\zeta-w|-|w-z|)^2} \leq \frac{1-|z|^2}{\delta^2/4}$$

und damit

$$(0 \leq) \sup_{|\zeta-w|\geq\delta} P(z\overline{\zeta}) \leq \frac{1-|z|^2}{\delta^2/4} \to 0 \qquad (z \to w)\ .$$

2. Es sei nun φ stetig an w, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(w)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \zeta \in S \text{ mit } |\zeta - w| < \delta.$$

Für $z \in \mathbb{D}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \big|(P*\varphi)(z) - \varphi(w)\big| &\overset{\text{(ii)}}{=} \left|\frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})\big(\varphi(\zeta)-\varphi(w)\big)|d\zeta|\right| \\ &\overset{\text{(i)}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_S P(z\overline{\zeta})\big|\varphi(\zeta)-\varphi(w)\big||d\zeta|. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-w|<\delta} P(z\overline{\zeta})\,\underbrace{\big|\varphi(\zeta)-\varphi(w)\big|}_{<\varepsilon}\,|d\zeta| < \varepsilon.$$

Außerdem existiert nach (iii) ein $\delta' > 0$ mit

$$\sup_{|\zeta-w|\geq\delta} P(z\overline{\zeta}) < \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \text{ mit } |z-w| < \delta'.$$

Also gilt für $|z-w| < \delta'$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta-w|\geq\delta} \underbrace{P(z\overline{\zeta})}_{<\varepsilon} \underbrace{\big|\varphi(\zeta)-\varphi(w)\big|}_{\leq 2\|\varphi\|_{\infty,S}} |d\zeta| \leq 2\varepsilon \cdot \|\varphi\|_{\infty,S}.$$

Insgesamt ist damit

$$|(P*\varphi)(z) - \varphi(w)| \leq \varepsilon(1 + 2\|\varphi\|_{\infty,S}) \ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 31.14 1. Ist $z = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{D}$ und $\zeta = e^{it}$, so ist

$$\begin{aligned} P(z\overline{\zeta}) &= \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2} = \frac{1-\rho^2}{|1-\rho e^{i(\vartheta-t)}|^2} = \\ &= \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\vartheta-t)+\rho^2} =: \tilde{P}(\rho, \vartheta - t), \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{P}(\rho, s) := \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(s)+\rho^2}$$

als Poisson-Kern bezeichnet wird (vgl. B. 29.5).
2. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Ist $h : G \to \mathbb{D}$ holomorph und bijektiv und so, dass h zu einer stetigen und bijektiven Funktion von $\overline{G}$ nach $\overline{\mathbb{D}}$ forgesetzt werden kann, so ist für $\varphi \in C(\partial G)$ mit $\psi := \varphi \circ (h^{-1}_{|S})$

$$(P * \psi) \circ h$$

die Lösung des Dirichlet-Problems $D(G, \varphi)$.
(Denn: ψ ist stetig auf S. Nach S. 31.13 ist $P \circ \psi$ Lösung von $D(\mathbb{D}, \psi)$. Da h holomorph in G ist, ist $(P * \psi) \circ h$ harmonisch in G ([Ü]). Außerdem gilt

$$(P*\psi)\big(h(z)\big) \to \psi\big(h(w)\big) = \varphi(w) \qquad (z \to w)$$

für alle $w \in \partial G$, da h stetig auf $\overline{G}$ ist.)
Ist speziell $G = U_r(z_0)$ für $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$, so hat h mit

$$h(z) = \frac{z-z_0}{r} \qquad (z \in \overline{U_r(z_0)})$$

offenbar obige Eigenschaften. Ist also $\varphi \in C\big(K_r(z_0)\big)$, so ist durch

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S P\Big(\frac{z-z_0}{r}\,\overline{\zeta}\Big)\,\varphi(z_0 + r\zeta)|d\zeta| \qquad \big(z \in U_r(z_0)\big)$$

die Lösung von $D\big(U_r(z_0),\varphi\big)$ gegeben.
3.Ist f stetig auf $\overline{U_r(z_0)}$ und harmonisch in $U_r(z_0)$, so gilt nach 2.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S P\Big(\frac{z-z_0}{r}\,\overline{\zeta}\Big)f(z_0+r\zeta)|d\zeta| \qquad \big(z\in U_r(z_0)\big) \tag{31.3}$$

da beide Seiten Lösungen von $D\big(U_r(z_0),f_{|K_r(z_0)}\big)$ sind. Die Darstellung (31.3) heißt Poisson-Integralformel für f.
Wie im Beweis zu S. 30.3 ergibt sich damit auch: Ist (f_n) eine Folge in $\operatorname{Har}(\Omega)$ mit $f_n\to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so ist auch $f\in\operatorname{Har}(\Omega)$. ([Ü])

Die Frage, für welche G und φ das Problem $D(G,\varphi)$ lösbar ist, werden wir hier nicht abschließend beantworten können. Wir wollen jedoch zumindest zeigen, dass $D(G,\varphi)$ nicht für alle G und φ lösbar ist. Dazu beweisen wir zunächst folgenden Hebbarkeitssatz.

Satz 31.15 *Ist $\Omega\subset\mathbb{C}$ offen und ist $f\in\operatorname{Har}(\Omega\setminus\{a\})$, wobei $a\in\Omega$, beschränkt in einer Umgebung von a, so ist f harmonisch fortsetzbar nach Ω (d.h. es existiert ein $f_0\in\operatorname{Har}(\Omega)$ mit $f_0=f$ auf $\Omega\setminus\{a\}$.)*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a=0$ und $\overline{\mathbb{D}}\subset\Omega$. Wir betrachten $u:=\operatorname{Re}f$ und für $\varepsilon>0$

$$u_\varepsilon:=\big(P*u_{|S}\big)-u+\varepsilon\cdot\ln|\cdot|.$$

Dann gilt $u_\varepsilon\in\operatorname{Har}(\mathbb{D}\setminus\{0\},\mathbb{R})$ und

$$\lim_{z\to w}u_\varepsilon(z)=0 \qquad \text{für alle } w\in S.$$

Da u beschränkt bei 0 ist, gilt außerdem

$$u_\varepsilon(z)\to-\infty \qquad (z\to 0).$$

Nach S. 31.8.2 ist damit

$$u_\varepsilon(z)\le 0 \qquad (z\in\mathbb{D},z\ne 0).$$

Da dies für alle $\varepsilon>0$ gilt, ist auch

$$(P*u_{|S})(z)-u(z)\le 0 \qquad (z\in\mathbb{D},z\ne 0),$$

also

$$P*u_{|S}\le u \qquad \text{auf } \mathbb{D}\setminus\{0\}.$$

Wendet man S. 31.8.2 auf

$$u_\varepsilon^-:=(P*u_{|S})-u-\varepsilon\cdot\ln|\cdot|$$

an, so ergibt sich analog $P * u_{|S} \geq u$, also „=“. Damit ist u durch $P * u_{|S}$ harmonisch nach $\mathbb{D}$ fortsetzbar.
Entsprechendes gilt wieder für $v = \operatorname{Im} f$. □

Bemerkung 31.16 Wir betrachten das Problem $D(\mathbb{D} \setminus \{0\}, \varphi)$ mit

$$\varphi(w) := \begin{cases} 0, & w \in S \\ 1, & w = 0 \end{cases}.$$

Dann ist $D(\mathbb{D} \setminus \{0\}, \varphi)$ nicht lösbar.
(Denn: Angenommen, es existiert ein $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ harmonisch in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $f(w) = \varphi(w)$ für $w \in S \cup \{0\}$. Dann ist nach S. 31.15 f harmonisch in $\mathbb{D}$. Da $f_{|S} = 0$ ist, muss nach B. 31.9 schon $f \equiv 0$ sein. Dies widerspricht $f(0) = 1$.)

Definition 31.17 1. Es seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete. Ist $h : G_1 \to G_2$ bijektiv und holomorph (dann ist nach S. 26.28 $Z(f') = \emptyset$ und damit nach S. 26.26 auch f^{-1} holomorph), so heißt h eine *konforme* Abbildung von G_1 auf G_2. Existiert eine solche Abbildung, so heißen G_1 und G_2 *konform äquivalent*.
2. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so heißt G *einfach zusammenhängend*, falls $G^c = \mathbb{C} \setminus G$ keine beschränkten Komponenten hat.

Es gelten damit zwei zentrale Sätze, deren Beweisführungen unser Zeitlimit leider wesentlich überschreiten würden.

Satz 31.18 *(Riemannscher Abbildungssatz)*
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist G konform äquivalent zu $\mathbb{D}$ genau dann, wenn G einfach zusammenhängend und $\neq \mathbb{C}$ ist.

Satz 31.19 *(Rungescher Approximationssatz)*
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist G genau dann einfach zusammenhängend, wenn zu jedem $f \in H(G)$ eine Folge von Polynomen P_n existiert mit $P_n \to f$ lokal gleichmäßig auf G.

Damit lässt sich wiederum (ohne allzu großen weiteren Aufwand) folgender Katalog an Äquivalenzen beweisen:

Satz 31.20 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) G ist topologisch äquivalent zu $\mathbb{D}$ (d.h. es existiert eine Abbildung $h : G \to \mathbb{D}$, die bijektiv und (bi-)stetig ist.

b) G ist einfach zusammenhängend.

c) $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ ist zusammenhängend.

d) Für alle geschlossenen Pfade γ in G und alle f holomorph in G gilt

$$\int_\gamma f = 0.$$

e) Für alle $f \in H(G)$ existiert ein $F \in H(G)$ mit $F' = f$.

f) Ist $f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset$, so ist $f = e^g$ für ein $g \in H(G)$.

g) Ist $f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset$, so ist $f = \varphi^2$ für ein $\varphi \in H(G)$.

A Vollständigkeit geordneter Körper

Geordnete Körper sind, grob gesprochen, Mengen K, versehen mit zwei Operationen „+ “ und „·“ sowie einer Relation „<“ so, dass man alle „üblichen“ Rechen- und Ordnungsregeln zur Verfügung hat. (Genaue Definition: siehe D. 2.1 (Axiome (K.1) bis (K.6)) und D. 3.3 (Axiome (O.1) bis (O.4)))
Insbesondere ergibt sich aus diesen Axiomen:

Für alle $a, b \in K$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung
(nämlich $x = b + (-a) =: b - a$).
Für alle $a, b \in K, a \neq 0$, hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung
(nämlich $x = ba^{-1} =: b/a$).
Für alle $c \in K, n \in \mathbb{N}$, hat die Gleichung $nx = c$ genau eine Lösung
(nämlich $x = c(n1_K)^{-1} =: c/n$).

Das „einfachste“ Beispiel eines geordneten Körpers sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den üblichen Operationen $+, \cdot, <$.
So weit, so gut. Damit lässt sich wunderbar rechnen. Nur ein wesentliches Defizit weisen die rationalen Zahlen auf: Gleichungen der Form

$$x^n = c\,, \tag{A.4}$$

wobei $n \in \mathbb{N} (n \geq 2)$ und $c \in \mathbb{Q}, c > 0$, sind nicht stets lösbar. Dies ist schon seit der Antike bekannt.

Auf Euklid geht die Erkenntnis zurück, dass Seite und Diagonale im Quadrat „inkommensurabel“sind. Es gilt nämlich

Satz A.1 *Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

Beweis.

1. Zunächst gilt: Ist $m \in \mathbb{Z}$, und ist m^2 gerade, so ist auch m gerade. (Denn: Wäre m ungerade, also $m = 2m_0 + 1$ für ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, so folgte

$$m^2 = (2m_0 + 1)^2 = 4m_0^2 + 4m_0 + 1\,,$$

also wäre auch m^2 ungerade.)

2. Angenommen, es existiert ein $x = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. O.E. seien p, q so, dass $q \in \mathbb{N}$ und p und q keine gemeinsamen Teiler haben. Aus

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

folgt $p^2 = 2q^2$, d. h. p^2 ist gerade. Nach 1. ist dann auch p gerade, d. h. $p = 2p_0$ für ein $p_0 \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$2q^2 = p^2 = 4p_0^2$$

d. h. $q^2 = 2p_0^2$, also q^2 und damit auch q gerade. Also haben p und q den gemeinsamen Faktor 2 im Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q. Damit ist die Annahme falsch d. h. es existiert kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

□

Wie lässt sich dieses Defizit beheben? Am Ende eines langwierigen Erkenntnisprozesses stehen die reellen Zahlen, die sich als geeignete Erweiterung des geordneten Körpers $\mathbb{Q}$ ergeben, und zwar derart, dass (A.4) für alle $n \in \mathbb{N}, c \geq 0$ lösbar ist.

Bevor wir darauf zu sprechen kommen, wie die reellen Zahlen aus den rationalen „konstruierbar" sind, beschäftigen wir uns zunächst mit der Frage, welche (über die Forderungen (K.1) - (K.6) und (O.1) - (O.4) hinausgehende) Eigenschaft die Lösbarkeit von Gleichungen der Form (A.4) sichert.

Definition A.2 Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $M \subset K$.

1. M heißt *nach oben beschränkt*, wenn ein $\overline{s} \in K$ existiert mit

$$x \leq \overline{s} \quad \text{für alle} \quad x \in M \ .$$

   Ein solches $\overline{s}$ heißt dann *obere Schranke* von M.

2. M heißt *nach unten beschränkt*, wenn ein $\underline{s} \in K$ existiert mit

$$x \geq \underline{s} \quad \text{für alle} \quad x \in M \ .$$

   Ein solches $\underline{s}$ heißt dann *untere Schranke* von M.

3. M heißt *beschränkt* wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel A.3 Es sei $K = \mathbb{Q}$ und

$$M := \{x \in \mathbb{Q} : \quad x \geq 0,\ x^2 < 2\} \ .$$

Dann ist M beschränkt, denn $\underline{s} = 0$ ist eine untere Schranke und $\overline{s} = 3/2$ ist eine obere Schranke von M (Ist $x > 3/2$, so folgt $x^2 > (3/2)^2 = 9/4 > 2$, d. h. $x \notin M$).

Mit einer oberen Schranke $\overline{s}$ von M ist natürlich jedes $\overline{\overline{s}} \in K$ mit $\overline{\overline{s}} > \overline{s}$ ebenfalls eine obere Schranke für M. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach "kleinsten" oberen Schranken.

Definition A.4 Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $M \subset K$.

1. Ein $\overline{\xi} \in K$ heißt *kleinste obere Schranke* (oder *Supremum*) von M, falls

   a) $\overline{\xi}$ obere Schranke von M ist

   und

   b) für jede obere Schranke $\overline{s}$ von M gilt $\overline{s} \geq \overline{\xi}$.

   Wir schreiben dann $\overline{\xi} = \sup M$. Weiter nennen wir $\overline{\xi}$ *Maximum* von M (und schreiben $\overline{\xi} = \max M$), falls zusätzlich $\overline{\xi} \in M$ gilt.

2. Ein $\underline{\xi} \in K$ heißt *größte untere Schranke* (oder *Infimum*) von M, falls

   a) $\underline{\xi}$ untere Schranke von M ist

   und

   b) für jede untere Schranke $\underline{s}$ von M gilt $\underline{s} \leq \underline{\xi}$.

   Wir schreiben dann $\underline{\xi} := \inf M$. Weiter nennen wir $\underline{\xi}$ *Minimum* von M (und schreiben $\underline{\xi} = \min M$), falls zusätzlich $\underline{\xi} \in M$ gilt.

Bemerkung A.5 Aus der Definition ergibt sich sofort, dass für jedes M höchstens ein Supremum und ein Infimum existieren.

Beispiel A.6 Es sei $K = \mathbb{Q}$.

1. Ist $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$, so gilt
$$0 = \inf M (= \min M) \quad \text{und} \quad 1 = \sup M (= \max M) .$$

2. Ist $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$, so gilt ebenfalls
$$0 = \inf M \quad \text{und} \quad 1 = \sup M .$$
   Man sieht, dass i.a. $\inf M$ und $\sup M$ nicht in M liegen müssen!

3. Es sei $M = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 < 2\}$ $(= \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\})$. Nach B. A.3 ist M beschränkt. Hier ist $\inf M = 0$, es existiert aber **kein Supremum** von M. Dies ergibt sich aus S. A.1 und dem folgenden Resultat.

Satz A.7 *Es sei K ein geordneter Körper, und es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in K, c \geq 0$. Wir setzen $M := \{t \in K : t \geq 0, t^n \leq c\}$. Dann gilt*

1. *M ist nach oben beschränkt.*
2. *Existiert $x := \sup M$, so gilt $x^n = c$.*

Beweis. O.E. können wir $c > 0$ annehmen (für $c = 0$ ist $M = \{0\}$).

1. Es gilt, da $1 + c \geq 1$,

$$c \leq 1 + c \leq (1+c)^2 \leq \ldots \leq (1+c)^n\,.$$

Ist $t \in M$, so gilt $t^n \leq c \leq (1+c)^n$ und damit auch $t \leq 1 + c$ (wäre $t > 1 + c$, so wäre auch $t^n > 1 + c^n$). Also ist $1 + c$ obere Schranke von M.

2. Zunächst gilt für $0 \leq a < b$

$$b^n - a^n \leq n(b-a)b^{n-1}\,. \tag{$*$}$$

Denn: Nach der verallgemeinerten geometrischen Summenformel ([Ü]) ist

$$b^n - a^n = (b-a)\sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-\nu-1} \leq n(b-a)b^{n-1}.$$

a) Angenommen, es ist $x^n > c$. Für $h := \dfrac{x^n - c}{nx^{n-1}}$ gilt dann

$$0 < h < \frac{x^n}{nx^{n-1}} \leq \frac{x^n}{x^{n-1}} \;=\; x\,.$$

Ist $t > x - h$, so folgt aus $(*)$ mit $b = x, a = x - h$

$$x^n - t^n < x^n - (x-h)^n \leq n \cdot h \cdot x^{n-1} = x^n - c\,.$$

Also ist $t^n > c$, d.h. $t \notin M$. Damit ist $x - h$ obere Schranke von M im Widerspruch dazu, dass x kleinste obere Schranke ist. Also ist $x^n \leq c$.

b) Angenommen, $x^n < c$. Dann ist

$$y := \frac{c - x^n}{n(x+1)^{n+1}} > 0\,.$$

Für $z := \min(1, y)$ folgt dann aus $(*)$ mit $b = x + z, a = x$

$$(x+z)^n - x^n \leq n \cdot z(x+z)^{n-1} \leq n \cdot y(x+1)^{n-1} \;=\; c - x^n\,,$$

also ist $(x+z)^n \leq c$ und damit $x + z \in M$. Da $z > 0$ ist, ist damit x keine obere Schranke von M. Widerspruch. Also ist $x^n = c$ nach a).

□

Definition A.8 Ein geordneter Körper K heißt (*ordnungs-)vollständig*, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von K ein Supremum hat.

Satz A.9 *Ist K vollständig, so hat für jedes $c \in K, c \geq 0$, und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung*

$$x^n = c$$

genau eine Lösung $x \in K, x \geq 0$. Wir setzen

$$\sqrt[n]{c} := x\,.$$

Beweis.

1. Die Existenz einer Lösung x ergibt sich aus S. A.7 (beachte $0 \in M$ dort, also $M \neq \emptyset$).

2. Es seien $x_1, x_2 \in K$ mit $0 \leq x_1 < x_2$. Dann ergibt sich auch $x_1^n < x_2^n$. Also hat die Gleichung $x^n = c$ höchstens eine Lösung.

□

Von zentraler Bedeutung für die Analysis ist die folgende Tatsache

Satz A.10 *Es existiert ein vollständiger geordneter Körper $\mathbb{R}$.*

Beweisskizze Wir wollen uns darauf beschränken, den Beweis zu skizzieren.
Die Elemente von $\mathbb{R}$ werden als gewisse Teilmengen von $\mathbb{Q}$ definiert (sog. Dedekind'sche Schnitte):
$A \subset \mathbb{Q}$ heißt *Dedekind'scher Schnitt*, falls gilt:

(D.1) $A \neq \emptyset\,, \quad A \neq \mathbb{Q}$.

(D.2) Ist $p \in A$ so gilt $q \in A$ für alle $q < p$.

(D.3) Ist $p \in A$ so existiert ein $r \in A$ mit $p < r$.

1. Sind A, B Schnitte, so definiert man

$$A + B := \{r + s : r \in A, s \in B\}\,.$$

Dann ist auch $A+B$ ein Schnitt, d. h. $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
(Denn: offenbar ist $A+B\neq\emptyset$.
Sind $r'\notin A, s'\notin B$, so ist $r'+s' > r+s$ für alle $r\in A, s\in B$. Also ist $r'+s'\notin A+B$ und insbesondere $A+B\neq\mathbb{Q}$. Es sei $p\in A+B$. Dann existieren $r\in A, s\in B$ mit $p=r+s$. Ist $q<p$, so folgt $q-s<r$, also $q-s\in A$ und damit $q=(q-s)+s\in A+B$, d. h. (ii) gilt.
Schließlich sei $t\in A$ so, dass $t>r$ ist. Dann gilt $p<t+s$ und $t+s\in A+B$. Also gilt auch (iii).)

(K.1)/2: Aus $r+s=s+r$ für alle $r\in A, s\in B$ folgt
$A+B=\{r+s : r\in A; s\in B\}=\{s+r : s\in B, r\in A\}=B+A$

(K.2)/2: analog

(K.3): Wir definieren $0_{\mathbb{R}} := \{r\in\mathbb{Q} : r<0\}$. Dann ist $0_{\mathbb{R}}$ ein Schnitt.
Wir zeigen: $A+0_{\mathbb{R}}=A$ für alle Schnitte A.
Es sei A ein Schnitt und $r\in A, s\in 0_{\mathbb{R}}$. Dann ist $r+s<r$,
also $r+s\in A$, d. h. $A+0_{\mathbb{R}}\subset A$.
Umgekehrt sei $p\in A$ beliebig. Wählt man ein $r>p, r\in A$ so gilt
$p-r\in 0_{\mathbb{R}}$ und $p=r+(p-r)\in A+0_{\mathbb{R}}$. Also ist $A\subset A+0_{\mathbb{R}}$.

(K.5)/2: Es sei A ein Schnitt. Wir setzen
$$-A := \{p\in\mathbb{Q} : -p-r\notin A \quad \text{für ein } r>0\}.$$
Man kann zeigen, dass dann $A+(-A)=0_{\mathbb{R}}$ gilt.

2. Wir definieren nun eine Relation $<$ auf den Schnitten (also auf $\mathbb{R}$) durch

$$A<B :\Leftrightarrow A\subset B,\ A\neq B\ .$$

Man rechnet damit nach, dass die Ordnungsaxiome $(O.1)$, $(O.2)$ und $(O.3)$ erfüllt sind.

3. Nun kann man auch eine Multiplikation in $\mathbb{R}$ definieren. (Dies erweist sich als etwas schwieriger als die Definition der Addition, insbesondere weil Produkte negativer rationaler Zahlen positiv sind). Zunächst definiert man daher eine Multiplikation auf $\mathbb{R}_+ := \{A\in\mathbb{R} : A>0_{\mathbb{R}}\}$ durch

$$A\cdot B := \{p\in\mathbb{Q} : \exists r\in A, s\in B \text{ mit } r,s>0 \text{ und } p<rs\}$$

(wobei $A,B>0_{\mathbb{R}}$). Anschließend definieren wir

$$A0_{\mathbb{R}} := 0_{\mathbb{R}}A := 0_{\mathbb{R}}$$

und

$$AB := \begin{cases} (-A)(-B) & , \text{ falls } A<0_{\mathbb{R}} \ , \ B<0_{\mathbb{R}} \\ -[(-A)B] & , \text{ falls } A<0_{\mathbb{R}} \ , \ B>0_{\mathbb{R}} \\ -[A(-B)] & , \text{ falls } A>0_{\mathbb{R}} \ , \ B<0_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Hiermit wird $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ zu einem geordneten Körper (mit Einselement $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$).
4. Wir zeigen, dass dieser vollständig ist:
Dazu sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt. Wir definieren

$$B := \bigcup_{A \in M} A\,.$$

Dann kann man zeigen, dass B ein Schnitt, also $B \in \mathbb{R}$ ist. Natürlich gilt $A \leq B$ für alle $A \in M$ und ist $C < B$, so existiert ein $s \in B$ mit $s \notin C$. Wegen $s \in B$ ist $s \in A$ für ein $A \in M$. Also ist $C < A$, d. h. C ist keine obere Schranke von M. Folglich ist $B = \sup M$.) □

Bemerkung A.11 Definiert man $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(\alpha) := \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}\,,$$

so ist φ injektiv, und es gilt $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ sowie $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\beta)\varphi(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Außerdem ist dabei $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ genau dann, wenn $\alpha < \beta$ ist. Indem wir α mit $\varphi(\alpha)$ identifizieren, können wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen.

Es gilt dann: Sind $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A < B$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $A < \alpha < B$.

(Denn: Da $A < B$ ist, existiert ein $p \in \mathbb{Q}$ mit $p \in B, p \notin A$. Weiter existiert ein $\alpha \in \mathbb{Q}$, mit $\alpha > p$ und $\alpha \in B$ (nach (D.3)). Dann ist

$$A \subset \varphi(\alpha) \subset B \quad \text{umd} \quad A \neq \varphi(\alpha) \neq B\,,$$

d.h. $A < \alpha < B$.)

B Mächtigkeit von Mengen

Wir werden im Folgenden sehen, dass in gewisser Weise „sehr viele“ reelle Zahlen irrational sind. Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit dem Begriff der Mächtigkeit einer Menge.

Definition B.1 Es seien M, M_1, M_2 beliebige Mengen.

1. M_1 und M_2 heißen *von gleicher Mächtigkeit* (oder kurz *gleichmächtig*), falls eine bijektive Abbildung $\varphi : M_1 \to M_2$ existiert.
2. M heißt *endlich*, falls M gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (oder auch $= \emptyset$) ist. Anderenfalls heißt M *unendlich*.
3. M heißt *abzählbar unendlich* falls M gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
4. M heißt *abzählbar* falls M endlich oder abzählbar unendlich ist. Anderenfalls heißt M *überabzählbar*.

Bemerkung B.2 1. Aus D. B.1 ergibt sich sofort, dass eine Menge M genau dann abzählbar unendlich ist, wenn paarweise veschiedene x_n $(n \in \mathbb{N})$ existieren mit $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Außerdem sieht man leicht, dass jede unendliche Menge eine abzählbar unendliche Teilmenge besitzt. Weiter folgt aus D. B.1 auch, dass $M \neq \emptyset$ genau dann abzählbar ist, wenn M in der Form $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ geschrieben werden kann (wobei jetzt die x_n i.A. nicht mehr paarweise verschieden gewählt werden können). Eine solche Darstellung nennt man auch eine *Abzählung* von M.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist wieder abzählbar.
(Denn: Es seien M abzählbar und $M_0 \subset M$. Ist M_0 endlich, so sind wir fertig. Es sei also M_0 unendlich. Dann ist M abzählbar unendlich, also existieren paarweise verschiedene x_n so, dass $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir definieren $n_1 := \min\{n : x_n \in M_0\}$. Sind $n_1 < \ldots < n_j$ bereits definiert, so setzen wir $n_{j+1} := \min\{n : x_n \in M_0,\, n > n_j\}$. (Man beachte: Nach dem Wohlordnungssatz (siehe (Ü)) hat jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum.) Dann gilt nach Konstruktion $M_0 = \{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}$.)
Folglich ist auch jede Menge, die eine überabzählbare Menge enthält, selbst überabzählbar.

Satz B.3 *Es sei $I \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge, und es seien A_n $(n \in I)$ abzählbare Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{n \in I} A_n$ abzählbar.*

Beweisskizze Ohne Einschränkung können wir $A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in I$ annehmen. Zudem koennen wir uns auch auf den Fall $I = \mathbb{N}$ beschränken. (Ist I endlich, so können wir ohne Einschränkung $I = \{1, \dots, n_0\}$ wählen und dann $A_n := A_1$ für $n > n_0$ setzen.) Es sei

$$A_1 = \left\{x_k^{(1)} : k \in \mathbb{N}\right\} \ , \quad A_2 = \left\{x_k^{(2)} : k \in \mathbb{N}\right\}, \dots$$

Wir betrachten folgende Anordnung der Elemente $x_k^{(n)}; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_1^{(1)} & \rightarrow & x_2^{(1)} & & x_3^{(1)} & \rightarrow & x_4^{(1)} & & x_5^{(1)} & \rightarrow & x_6^{(1)} & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
x_1^{(2)} & & x_2^{(2)} & & x_3^{(2)} & & x_4^{(2)} & & x_5^{(2)} & \dots & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
x_1^{(3)} & & x_2^{(3)} & & x_3^{(3)} & & x_4^{(3)} & \dots & & \dots & & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
x_1^{(4)} & & x_2^{(4)} & & x_3^{(4)} & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & \\
x_1^{(5)} & & x_2^{(5)} & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & \\
x_1^{(6)} & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\downarrow & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Hierbei treten alle $x_k^{(n)}$ auf. Diese können durch “Verfolgen der Pfeile” zu einer Folge angeordnet werden:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_3^{(2)}, \dots$$

Dies ergibt eine Abzählung von $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, d. h. $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist abzählbar. □

Insbesondere ergibt sich aus S. B.3

Satz B.4 *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Zunächst sieht man leicht, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar ist ([Ü]). Also ist $A_n := \{k/n : k \in \mathbb{Z}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abzählbar. Nach S. B.3 ist folglich auch

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{k/n : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$$

abzählbar. □

Wir wollen nun zeigen, dass jedes (nichttriviale) Intervall in $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Daraus ergibt sich auch unmittelbar die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Vorbereitend zeigen wir:

Satz B.5 *(Intervallschachtelungsprinzip)*
Ist I_n eine Folge von Intervallen der Form $I_n = [a_n, b_n]$, mit $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $b_n - a_n \to 0\,(n \to \infty)$, so existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \ .$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $(a_n) \uparrow$ und $(b_n) \downarrow$. Außerdem gilt $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$. Also existieren nach dem Hauptsatz über monotone Folgen

$$a := \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{und} \quad b := \lim_{n \to \infty} b_n \ .$$

Aus $a_n \le b_n$ folgt $a \le b$, also auch

$$a_n \le a \le b \le b_n \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Folglich ist

$$[a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \ .$$

Aus $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $a = b$, also ist $[a, b]$ einpunktig. □

Satz B.6 *Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ (das mehr als einen Punkt enthält) ist überabzählbar.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir das Intervall $[0, 1]$ betrachten. Angenommen, $[0, 1]$ ist abzählbar, d. h.

$$[0, 1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Wir teilen dann $[0, 1]$ in die drei gleich langen Intervalle $[0, 1/3], [1/3, 2/3]$ und $[2/3, 1]$ auf. Dann ist x_1 in einem dieser Intervalle (das wir I_1 nennen) nicht enthalten. Anschließend teilen wir I_1 in drei gleich lange Intervalle (also der Länge $1/9 = 1/3^2$) auf. Dann ist x_2 in einem dieser Intervalle (I_2 genannt) nicht enthalten. So fortfahrend erhalten wir induktiv eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$ von Intervallen in $[0, 1]$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ sowie $x_n \notin I_n$ und $b_n - a_n = 1/3^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Also ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$ für ein $x \in [0, 1]$. Ist $k \in \mathbb{N}$ so gilt nach Konstruktion $x_k \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, d. h. $x_k \ne x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Widerspruch! □

Bemerkung B.7 Allgemein gilt: Ist M überabzählbar und ist $A \subset M$ abzählbar, so ist auch $M \setminus A$ überabzählbar (denn sonst wäre nach S. B.3 auch $M = A \cup (M \setminus A)$ abzählbar). Also ist insbesondere nach S. B.4 und S. B.6 die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar.

C Elementare Funktionen

Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$, die nach B. 6.20 absolut konvergent ist.

Definition C.1 1. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

heißt *(komplexe) Exponentialfunktion.*
2. Die Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

heißt *(komplexe) Cosinusfunktion.*
3. Die Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

heißt *(komplexe) Sinusfunktion.*

Bemerkung C.2 1. Aus der Definition ergibt sich sofort $\exp(0) = \cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ sowie

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{und} \quad \sin(-z) = -\sin z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Außerdem sieht man leicht ([Ü]), dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die sog. Eulersche Formel

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{C.5}$$

sowie

$$\cos(z) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu/2} z^\nu}{\nu!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin(z) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{(\nu-1)/2} z^\nu}{\nu!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(mit absoluter Konvergenz der Reihen) gilt.
2. Ist speziell x reell, so sind auch $\exp(x)$, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ reell und es gilt

$$\cos x = \operatorname{Re}(\exp(ix)) \quad \text{und} \quad \sin x = \operatorname{Im}(\exp(ix)) .$$

Eine der zentralen Eigenschaften der Exponentialfunktion stellt die folgende Funktionalgleichung dar, die zeigt, dass exp aus der Addition eine Multiplikation macht.

Satz C.3 *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)\ .$$

Beweis. Die Reihen $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{w^\nu}{\nu!}$ konvergieren absolut nach B. 6.20. Also konvergiert nach S. 6.22 das Cauchy-Produkt der beiden Reihen, und es gilt

$$\begin{aligned}\exp(z)\cdot\exp(w) &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{w^\nu}{\nu!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}\frac{w^{n-\nu}}{(n-\nu)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu} z^\nu w^{n-\nu} \overset{S.3.6}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)\ .\end{aligned}$$

□

Als Folgerung erhalten wir

Satz C.4 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(nz) = \exp^n(z)$. Insbesondere ist $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ und damit auch $\exp(z) \neq 0$.*

Beweis. Zunächst ergibt sich für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\exp(\pm kz) = \exp^k(\pm z)$$

induktiv aus S. C.3. Nach D. C.1 gilt $\exp(0) = 1$. Also folgt aus S. C.3 auch

$$1 = \exp(z-z) = \exp(z)\cdot\exp(-z)$$

d. h. $\exp(-z) = 1/\exp(z)$. Duch Kombination der beiden Identitäten erhält man die Behauptung auch für negative n. □

Satz C.5 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)\left(=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\right)\ .$$

Beweis. Wir setzen

$$s_n := \sum_{\nu=0}^{n}\frac{z^\nu}{\nu!} \qquad \text{und} \qquad b_n := (1+z/n)^n\ .$$

Damit genügt es, zu zeigen $s_n - b_n \to 0$. Es gilt (mit der binomischen Formel)

$$b_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{z^\nu}{n^\nu}$$

also auch

$$s_n - b_n = \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{\Big(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{n^\nu}\Big)}_{=:\alpha_{n\nu}} \frac{z^\nu}{\nu!} \; .$$

Dabei ist $\alpha_{n\nu} \in [0,1]$ und es gilt $\alpha_{n\nu} \to 0$ für $n \to \infty$ und alle festen ν.
Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=N}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} < \varepsilon/2 \quad (n \geq N) \; .$$

Aus $\sum\limits_{\nu=0}^{N-1} \frac{|z|^\nu}{\nu!}\alpha_{n\nu} \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt die Existenz eines $N'_\varepsilon \geq N$ so, dass

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{|z|^\nu}{\nu!}\alpha_{n\nu} < \varepsilon/2 \quad (n \geq N'_\varepsilon) \; .$$

Also ergibt sich insgesamt für alle $n \geq N'_\varepsilon$

$$|s_n - b_n| \leq \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{|z|^\nu}{\nu!}\alpha_{n\nu} + \sum_{\nu=N}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \underbrace{\alpha_{n\nu}}_{\leq 1} < \varepsilon \; .$$

□

Bemerkung C.6 Aus S. C.5 ergibt sich insbesondere

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \; .$$

Hieraus folgt nach S. C.4

$$\exp(n) = e^n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Deshalb schreiben wir in Zukunft auch e^z statt $\exp(z)$ für allgemeines $z \in \mathbb{C}$.

Satz C.7 *(Additionstheoreme)*
Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

1. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,

2. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$.

Beweis. 1. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{1}{4}\big((e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw}) + (e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw})\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}\big) = \frac{1}{2}\big(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\big) \\
&= \cos(z+w)
\end{aligned}$$

2. ergibt sich durch eine entsprechende Rechnung. □

Wir schauen uns nun trigonometrischen Funktionen sin und cos speziell für reelle Argumente, also die Exponentialfunktion für rein imaginäre Argumente an.

Satz C.8 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = |e^{ix}| = 1$$

und damit insbesondere $-1 \le \cos x \le 1$ und $-1 \le \sin x \le 1$.

Beweis. Zunächst gilt für beliebiges $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{s_n(z)} = \overline{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\overline{z}^\nu}{\nu!} = s_n(\overline{z}) \to e^{\overline{z}} \qquad (n \to \infty) .$$

Aus $s_n(z) \to e^z \quad (n \to \infty)$ folgt $\overline{s_n(z)} \to \overline{e^z} \quad (n \to \infty)$ ([Ü]). Also ist $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. Speziell ergibt sich für $z = ix$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = |e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} \overset{S. C.4}{=} 1 .$$

□

Unser Ziel ist es nun, die Zahl π analytisch zu definieren. Dazu zeigen wir

Satz C.9 *Die Funktion* cos *hat im Intervall* $(0, \infty)$ *eine kleinste Nullstelle* x_0*.*

Beweis. Nach B. C.2 gilt (mit absoluter Konvergenz)

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \ldots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3\cdot 4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7\cdot 8}\right) - \ldots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3\cdot 4}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) .
\end{aligned}$$

Für $x = 2$ ergibt sich

$$1 - \frac{2^2}{(4k+3)(4k+4)} > 0 \qquad (k \in \mathbb{N}_0) ,$$

also

$$\cos 2 \leq 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4}\right) = -\frac{1}{3} < 0 .$$

Aus $\cos(0) = 1$ und der Stetigkeit von cos ergibt sich nach dem Zwischenwertsatz (S. 8.13) die Existenz eines $\xi \in (0, 2)$ mit $\cos(\xi) = 0$. Für $x_0 := \inf\{\xi : \cos(\xi) = 0,\, \xi > 0\}$ gilt auch $\cos(x_0) = 0$ (da cos stetig) und $x_0 > 0$. □

Definition C.10 Ist x_0 wie in S. C.9, so setzen wir

$$\pi := 2x_0 .$$

Bemerkung C.11 Nach obiger Definition gilt also

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

und mit $\cos(x) = \cos(-x)$ folgt $\cos(x) > 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Weiter gilt

$$1 = |e^{i\pi/2}|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) .$$

Außerdem kann man mit Hilfe des Zwischenewertsatzes zeigen, dass $\sin x > 0$ für $x \in (0, \pi/2]$ und damit insbesondere

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

gilt ([Ü]). Hieraus ergibt sich wiederum $e^{i\pi/2} = i$ und allgemeiner für $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i\pi k/2} = \left(e^{i\pi/2}\right)^k = i^k = \begin{cases} (-1)^{k/2}, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ i(-1)^{(k-1)/2}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Unter Ausnutzung der Additionstheoreme erhält man Periodizitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Satz C.12 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

1. $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$, $\qquad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$,
2. $\cos(z + \pi) = -\cos z$, $\qquad \sin(z + \pi) = -\sin z$,

3. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$,

($\cos$ *und* $\sin$ *sind "*2π*-periodisch")*

4. $\sin z = 0$ *genau dann, wenn* $z = k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$,

5. $\cos z = 0$ *genau dann, wenn* $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Mit S. C.7.1 und B. C.11 erhalten wir

$$\cos(z + \pi/2) = \cos(z)\cos(\pi/2) - \sin(z)\sin(\pi/2) = -\sin z \; .$$

und

$$\sin(z + \pi/2) = \cos(z)\sin(\pi/2) + \sin(z)\cos(\pi/2) = \cos z \; .$$

Hieraus folgt wiederum

$$\cos(z + \pi) = \cos(z + \pi/2)\cos(\pi/2) - \sin(z + \pi/2)\sin(\pi/2) = -\cos z \; .$$

Die weiteren Behauptungen ergeben sich in ähnlicher Weise ([Ü]). □

Wir wollen uns nun mit der Frage der Umkehrbarkeit der reellen Exponentialfunktion und der reellen trigonometrische Funktionen beschäftigen. Zunächst gilt

Satz C.13 *1. Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $e^x \geq \max(1 + x, 0)$.

2. Für alle $x < 1$ *ist* $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

3. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*

Beweis. 1. Aus $(1 + x/n)^n \geq 0$ für fast alle n folgt $e^x \geq 0$. Ist $x \geq -1$ so ergibt sich mit der Bernoullischen Ungleichung $(1+x/n)^n \geq 1+x$ für alle n, also auch $e^x \geq 1+x$.
2. Nach 1. gilt für $x < 1$

$$e^{-x} \geq 1 - x \; ,$$

also auch

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - x} \; .$$

3. Für $x_1 < x_2$ ergibt sich $e^{x_2}/e^{x_1} = e^{x_2 - x_1} \geq 1 + (x_2 - x_1) > 1$ nach 1. □

Bemerkung und Definition C.14 Insbesondere folgt aus S. C.13.1 und 2.

$$e^x \to \infty \quad (x \to \infty) \qquad \text{und} \qquad e^x \to 0 \quad (x \to -\infty)$$

und damit ist $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ nach dem Zwischenwertsatz.
Nach S. C.13.3 und S. 8.20 existiert die Umkehrfunktion von exp auf dem Intervall $(0,\infty)$ und ist dort stetig und streng monoton wachsend. Diese Funktion nennnen wir *(natürliche) Logarithmusfunktion* und schreiben dafür ln oder auch log. Es gilt also für $x \in (0,\infty)$ und $y \in \mathbb{R}$

$$y = \ln(x) \Longleftrightarrow e^y = x\ .$$

Aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ergibt sich leicht ([Ü]):

1. Für alle $x_1, x_2 > 0$ ist $\ln(x_1x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

2. Für alle $x > 0$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Weiterhin definieren wir damit allgemeine Potenzen und Logarithmen.

Definition C.15 Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$a^b := \exp(b \cdot \ln a) = e^{b\cdot\ln a}\ .$$

Man beachte, dass aufgrund von 2. in B. C.14 für $b = n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^n = e^{n\ln a}.$$

Damit stimmt die obige Definition für den Fall $b \in \mathbb{Z}$ mit der alten Definition überein.

Aus den Rechenregeln für ln und exp erhält man weiterhin

Satz C.16 *(allgemeine Potenzgesetze)*

1. *Für $a > 0$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ gilt $a^{b_1}a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$ und im Falle $b_1 \in \mathbb{R}$ auch $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1b_2}$.*

2. *Für $a_1, a_2 > 0$ und $b \in \mathbb{C}$ gilt $a_1^b a_2^b = (a_1a_2)^b$.*

Beweis. 1. Es gilt

$$a^{b_1}a^{b_2} = e^{b_1\ln a}e^{b_2\ln a} = e^{b_1\ln a + b_2\ln a} = e^{(b_1+b_2)\ln a} = a^{b_1+b_2}\ .$$

Im Falle $b_1 \in \mathbb{R}$ ist $a^{b_1} > 0$ und damit gilt dann auch

$$(a^{b_1})^{b_2} = e^{b_2\ln(a^{b_1})} = e^{b_2\ln(e^{b_1\ln a})} = e^{b_2b_1\ln a} = a^{b_1b_2}\ .$$

2. [Ü]. □

Bemerkung und Definition C.17 Wir betrachten ein festes $a > 0, a \neq 1$. Dann gilt für jedes $x > 0$ mit $y := \ln x / \ln a$:

$$a^y = e^{y \ln a} = e^{\ln x} = x$$

und y ist die einzige (reelle) Lösung dieser Gleichung (die Funktion $y \mapsto a^y$ ist im Falle $a > 1$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und im Falle und $0 < a < 1$ streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$). Wir definieren

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (x > 0) .$$

Es gilt also für $x > 0, y \in \mathbb{R}$

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow a^y = x .$$

Satz C.18 *Es gilt*

1. $\sin$ *ist streng monoton wachsend in* $[-\pi/2, \pi/2]$,
2. $\cos$ *ist streng monoton fallend in* $[0, \pi]$.

Beweis. 1. Aus S. C.7 folgt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sin x_2 - \sin x_1 &= \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) .\end{aligned}$$

Ist $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq \pi/2$, so gilt $\cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) > 0$ und $\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) > 0$, also $\sin x_1 < \sin x_2$.
2. Analog. □

Bemerkung und Definition C.19 Die nach S. 8.20 und S. C.18 auf $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$ existierende (und dort streng monoton wachsende und stetige) Umkehrfunktion von sin heißt arcsin, d. h. $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ erfüllt

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \qquad (x \in [-1, 1],\ y \in [-\pi/2, \pi/2]) .$$

Entsprechend bezeichnet man die auf $[-1, 1]$ existierende (und dort streng monoton fallende und stetige) Umkehrfunktion von cos mit arccos, d. h. $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ erfüllt

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \quad (x \in [-1, 1],\ y \in [0, \pi])$$

Bemerkung und Definition C.20 Wir definieren die Funktionen

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$$

und

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$$

durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\ , \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}\ .$$

Dann sind tan und cot stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.
Außerdem gilt: tan ist streng monoton wachsend in $(-\pi/2, \pi/2)$ und cot ist streng monoton fallend in $(0, \pi)$ mit $W(\tan_{|(-\pi/2,\pi/2)}) = W(\cot_{|(0,\pi)}) = \mathbb{R}$. Also existieren auf $\mathbb{R}$ die Umkehrfunktionen, genannt arctan bzw. arccot.

D Polarkoordinaten und der Fundamentalsatz der Algebra

Komplexe Zahlen z (bzw. Punkte im $\mathbb{R}^2$) werden meist in Normaldarstellung $z = x+iy$ (bzw. in kartesischen Koordinaten x, y) angegeben. Eine Alternative, die insbesondere besser mit der komplexen Multiplikation „harmoniert“ ist die Darstellung in Polarkoordinaten:
Wir betrachten $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$f(r,\varphi) := re^{i\varphi} \qquad (r > 0, \varphi \in \mathbb{R})\,.$$

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $f_{|(0,\infty)\times(\alpha,\alpha+2\pi]}$ bijektiv.
(Denn:
1. Für $(r,\varphi), (\tilde{r}, \tilde{\varphi} \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ mit $f(r,\varphi) = f(\tilde{r},\tilde{\varphi})$ gilt

$$r = |re^{i\varphi}| = |\tilde{r}e^{i\tilde{\varphi}}| = \tilde{r}$$

und damit auch $e^{i\varphi} = e^{i\tilde{\varphi}}$ bzw. $e^{i(\varphi-\tilde{\varphi})} = 1$. Aus $\sin(\varphi - \tilde{\varphi}) = 0$ und $\cos(\varphi - \tilde{\varphi}) = 1$ folgt $\tilde{\varphi} = \varphi + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ mit S. C.12. Damit ist $f_{|(0,\infty)\times(\alpha,\alpha+2\pi]}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ injektiv.
2. Auf Grund der 2π-Periodizität von $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ reicht es, die Surjektivität für $\alpha = 0$ zu zeigen:
Ist $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so setzen wir $r := |z| > 0$.
1. Fall: $y \geq 0$. Dann betrachten wir $\varphi := \arccos(x/r) \in [0,\pi]$. Dafür gilt $x = r \cdot \cos\varphi$ und

$$y^2 = r^2 - x^2 = r^2(1 - \cos^2\varphi) = r^2 \sin^2\varphi\,.$$

Da $\varphi \in [0,\pi]$ ist, ist $\sin\varphi \geq 0$. Damit ist $y = r\sin\varphi$.
2. Fall: $y < 0$. Dann gilt für $\varphi := -\arccos(x/r) \in (-\pi, 0)$ genauso $x = r\cos(-\varphi) = r\cos\varphi$ und

$$y^2 = r^2 \sin^2\varphi\,.$$

Da jetzt $\sin\varphi < 0$ ist, folgt wieder $y = r\sin\varphi$.)

Bemerkung und Definition D.1 Eine wichtige Folgerung aus der Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen ist die Existenz von Wurzeln komplexer Zahlen: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann existieren genau n Lösungen der Gleichung

$$z^n = \zeta\,,$$

nämlich

$$z_k := \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi+2k\pi)/n} \qquad (k = 1, \ldots, n)\,,$$

falls $w = re^{i\varphi}$. Diese n Zahlen heißen *n-te (komplexe) Wurzeln* aus ζ.
(Denn: Da $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ 2π-perodisch ist, gilt einerseits

$$z_k^n = r \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)} = re^{i\varphi} = w \qquad (k = 1, \ldots, n)\,,$$

und andererseits folgt für $z = \rho e^{i\psi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z^n = \zeta$

$$\rho^n e^{in\psi} = z^n = re^{i\varphi}$$

und damit $\rho = \sqrt[n]{r}$ und $\psi = (\varphi + 2k\pi)/n$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wieder auf Grund der 2π-Periodizität sind von diesen Zahlen nur n paarweise verschieden.)

Ist speziell $\zeta = 1$, so heißen die n Zahlen

$$z_k = e^{2k\pi i/n} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

n-te Einheitswurzeln. So sind etwa ± 1 die zweiten Einheitswurzeln und $\pm i, \pm 1$ die vierten Einheitswurzeln.

Die Existenz von Wurzeln bedeutet, dass Polynome $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $P(z) = z^n - \zeta$ stets Nullstellen besitzen. Allgemein gilt

Satz D.2 *(Fundamentalsatz der Algebra)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n, d.h.

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \qquad (z \in \mathbb{C})$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Dann existieren $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)\,.$$

Beweis.
1. Ist (w_j) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $|w_j| \to \infty$ $(j \to \infty)$, so gilt

$$\frac{P(w_j)}{a_n w_j^n} = 1 + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{a_n} \underbrace{\frac{1}{w_j^{n-\nu}}}_{\to 0\ (j\to\infty)} \to 1 \qquad (j \to \infty)\,, \tag{D.6}$$

Also existiert insbesondere ein $R > 0$ so, dass

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}\,|a_n|\,|z_n|^n \qquad (|z| \geq R)$$

(sonst wäre $|P(w_j)| < \frac{1}{2}\,|a_n|\,|w_j|^n$ für eine Folge (w_j) mit $|w_j| \to \infty$ im Widerspruch zu (D.6)). Wählt man noch R so groß, dass $\frac{1}{2}|a_n|R^n > |a_0|$ ist, so folgt

$$|P(z)| > |a_0| = |P(0)| \qquad (|z| \geq R)\,,$$

und damit ist

$$\inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{|z|\leq R} |P(z)|\,.$$

Da $|P| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig ist, hat $|P|_{|\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq R\}}$ nach S. 9.29 ein Minimum, d.h. es existiert ein z_1 mit

$$|P(z_1)| = \min_{|z|\leq R} |P(z)| = \min_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|\,.$$

2. Wir zeigen: $P(z_1) = 0$.
Angenommen, nicht. Dann ist $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$Q(z) := \frac{P(z+z_1)}{P(z_1)} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

ein Polynom vom Grad n mit $Q(0) = 1$ und $|Q(z)| \geq 1$ $(z \in \mathbb{C})$. Damit ist durch $R(z) := 1 - Q(z)$ ein Polynom vom Grad n gegeben mit $R(0) = 0$. Also existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und $b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $b_m \neq 0$ und

$$R(z) = b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \ldots + b_n z^n\,.$$

Ist $b_m = |b_m|e^{i\varphi}$, so gilt für $\psi = -\varphi/m$ und $t \in \mathbb{R}$

$$R(te^{i\psi}) = |b_m|t^m + t^m \sum_{\nu} = m + 1^n b_\nu t^{\nu-m} e^{i\nu\psi}$$

mit

$$\delta(t) := \sum_{\nu=m+1}^{n} b_m e^{i\nu\psi} t^{\nu-m} \to 0 \quad (t \to 0)\,.$$

Wählt man $t > 0$ so klein, dass $|\delta(t)| < \frac{|b_m|}{2}$ und $t < 1/\sqrt[m]{|b_m|}$, so folgt

$$\begin{aligned}
|Q(te^{i\psi})| &= |1 - R(te^{i\psi})| \leq |1 - |b_m|t^m| + t^m|\delta(t)| \\
&= 1 - |b_m|t^m + t^m|\delta(t)| < 1 - \frac{|b_m|}{2}\,t^m < 1\,.
\end{aligned}$$

Widerspruch zu $|Q(z)| \geq 1$.
3. Es gilt nach 2. und mit der verallgemeinerten geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}
P(z) &= P(z) - P(z_1) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (z^\nu - z_1^\nu) = \\
&= (z - z_1) \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu-1} z^\mu z_1^{\nu-1-\mu}}_{=:P_1(z)}\,.
\end{aligned}$$

Dabei ist P_1 ein Polynom vom Grad $n-1$ mit führendem Koeffizienten a_n (d.h. $P_1(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} c_\nu z^\nu$ mit $c_{n-1} = a_n$).
Durch Anwendung von 2. auf P_1 erhalten wir ein $z_2 \in \mathbb{C}$ mit $P_1(z_2) = 0$. Dann gilt entsprechend

$$P_1(z) = (z - z_2)P_2(z)$$

mit einem Polynom P_2 vom Grad $n-2$ und führendem Koeffizienten a_n. So fortfahrend erhalten wir nach n Schritten

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - z_1)P_1(z) = (z - z_1)(z - z_2)P_2(z) = \\ &= \cdots = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)a_n\,. \end{aligned}$$

$\square$

E Kompaktheit

Definition E.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Eine Familie $\mathcal{U}$ offener Mengen in X heißt *offene Überdeckung* von X, falls
$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \, .$$

2. X heißt *(überdeckungs)-kompakt*, falls jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine endliche Teilüberdeckung enthält, d. h. ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so existieren $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{U}$ mit
$$X = \bigcup_{j=1}^{m} U_j \, .$$

3. Ist $K \subset X$, so heißt K kompakt, falls $(K, d_{|K \times K})$ kompakt ist.

Satz E.2 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

a) X ist kompakt.

b) Jede unendliche Teilmenge $M \subset X$ hat einen Häufungspunkt.

c) Jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge (d. h. X ist folgenkompakt).

Beim Beweis verwenden wir folgendes Hilfsresultat, das auch für sich genommen interessant ist.

Satz E.3 *Ist (X, d) ein metrischer Raum mit der Eigenschaft, dass jede Folge in X eine Cauchy-Teilfolge besitzt, so ist X separabel.*

Beweis. 1. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir zeigen zunächst: Es existiert eine endliche Teilmenge A_ε von X mit
$$d(a, b) \geq \varepsilon \qquad \text{für alle } a, b \in A_\varepsilon,\ a \neq b$$
und
$$U_\varepsilon(x) \cap A_\varepsilon \neq \emptyset \qquad \text{für alle } x \in X \, .$$
Angenommen, eine solche Menge A_ε existiert nicht. Dann definieren wir induktiv eine Folge (x_n) in X so, dass $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für alle j, k mit $j \neq k$. Eine solche Folge hat keine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist. Also ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir setzen $x_1 \in X$ beliebig und nehmen an, dass wir $x_1, \ldots, x_n$ mit $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für $j, k = 1, \ldots, n, j \neq k$, bereits definiert haben. Die Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erfüllt dann die erste Bedingung, so dass nach Annahme die zweite nicht erfüllt ist. Folglich existiert ein $x_{n+1} \in X$ mit

$$U_\varepsilon(x_{n+1}) \cap \{x_1, \ldots, x_n\} = \emptyset \,,$$

d. h. $d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ für $j = 1, \ldots, n$. Damit ist (x_n) wie gewünscht.
2. Wir definieren

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n} \,.$$

Dann ist A abzählbar (S. B.3). Ist $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so folgt für n mit $1/n < \varepsilon$ aus $(**)$:

$$U_\varepsilon(x) \cap A \supset U_{1/n}(x) \cap A_{1/n} \neq \emptyset \,.$$

Also ist $x \in A$ oder $x \in H(A)$, d. h. $x \in \overline{A}$ nach S. 9.14. Da $x \in X$ beliebig war, ist $\overline{A} = X$. □

Beweis zu S. E.2.
c) $\Rightarrow$ a): Nach S. E.3 existiert eine abzählbare dichte Teilmenge A von X. Es sei

$$\mathcal{B} := \{U_r(x) : x \in A, r \in \mathbb{Q}, r > 0\} \qquad \left(= \bigcup_{\substack{r>0 \\ r\in\mathbb{Q}}} \{U_r(x) : x \in A\} \right) \,.$$

Dann ist auch $\mathcal{B}$ abzählbar nach S. B.3.
Es sei nun $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und

$$\mathcal{B}_0 := \{B \in \mathcal{B} : \exists\, U \in \mathcal{U} : B \subset U\} \,.$$

Für jedes $B \in \mathcal{B}_0$ wählen wir ein $V_B \in \mathcal{U}$ mit $B \subset V_B$ und setzen

$$\mathcal{U}_0 := \{V_B : B \in \mathcal{B}_0\} \quad (\subset \mathcal{U}) \,.$$

Dann ist $\mathcal{U}_0$ abzählbar (da $\mathcal{B}_0$ abzählbar ist). Wir zeigen, dass $\mathcal{U}_0$ eine offene Überdeckung von X ist. Dazu sei $y \in X$ beliebig. Wir wählen ein $U \in \mathcal{U}$ mit $y \in U$. Da U offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y) \subset U$. Nun wählen wir ein $x \in A$ mit $d(x, y) < \varepsilon/2$ und ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $d(x, y) < r < \varepsilon/2$. Dann gilt (Dreiecksungleichung!)

$$z \in U_r(x) \subset U_\varepsilon(y) \subset U \,,$$

also $B := U_r(x) \in \mathcal{B}_0$. Für V_B gilt $z \in B \subset V_B$ und $V_B \in \mathcal{U}_0$. Folglich ist $\mathcal{U}_0$ eine Überdeckung von X.
(Wir haben also bisher gezeigt: Jede offene Überdeckung besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.)

Es sei $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathcal{U}_0$. Wir setzen

$$W_n := \bigcup_{j=1}^{n} V_j \; .$$

Dann ist $W_n \subset W_{n+1}\,(n \in \mathbb{N})$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} V_j = X$. Es genügt zu zeigen: $W_n = X$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann exisitert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X \backslash W_n$. Nach Voraussetzung hat (x_n) eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit Grenzwert x. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $x \in W_N$. Dann gilt einerseits $x_n \notin W_N$ für alle $n \geq N$ aber andererseits auch $x_{n_k} \in W_N$ für alle $k \geq k_0$ (da $x_{n_k} \to x\,(k \to \infty)$ und W_N offen). Widerspruch!

a) $\Rightarrow$ b): Angenommen, b) gilt nicht. Dann existiert eine unendliche Teilmenge D von X ohne Häufungspunkt. Also existiert zu jedem $x \in D$ eine offene Umgebung V_x von x mit $D \cap V_x = \{x\}$. Da D abgeschlossen ist (nach S. 9.15) ist $\mathcal{U} := \{U_x := V_x \cup D^c : x \in D\}$ eine offene Überdeckung von X. Ist $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{U}$, so ist $X \not\subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{x_j}$, da für $x \in D \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} (\neq \emptyset)$ gilt: $x \notin U_{x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Widerspruch zu a)!

b) $\Rightarrow$ c): Es sei (x_n) eine Folge in X. Ist $E := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich so existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $x_{n_k} \equiv x_{n_1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also gilt $x_{n_k} \to x_{n_1} \in X \quad (n \to \infty)$. Ist E unendlich, so hat E nach Voraussetzung einen Häufungspunkt $x \in X$. Dann existiert auch eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $x_{n_k} \to x (n \to \infty)$ (vgl. B. 7.17). $\square$