J. Müller

SS 2006
28.06.2006

9. Übung zur Analysis II

Abgabe: Dienstag, 04.07.06, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G19: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } y = x^2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Für welche Richtungen r existiert $\partial_r f(0,0)$?

(ii) Ist f stetig an $(0,0)$?

G20: Berechnen Sie Jf bzw. grad$f$ für

(i) $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ \arctan(x/y) \end{pmatrix}$,

(ii) $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln|x|$,

(iii) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = Ax$, wobei $A \in \mathbb{K}^{m\times d}$.

G21: Es sei $a \in \mathbb{K}^d$ und $a^* := \overline{a}^T \in \mathbb{K}^{1\times d}$. Zeigen Sie:

$$||a^*|| \ (= \sup\{|a^*x| : |x| \le 1\}) = |a|\,.$$

Hausübungen

H25: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,\ (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Beweisen Sie:

(i) $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ existieren auf $\mathbb{R}^2$ und sind unstetig an $(0,0)$.

(ii) f ist differenzierbar an $(0,0)$.

H26: Es sei $M \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, und es sei $f : M \to \mathbb{K}$. Zeigen Sie: Ist $z_0 = x_0 + iy_0 \in M^0$, so ist f genau dann (komplex) differenzierbar an z_0, wenn f reell differenzierbar an (x_0,y_0) ist mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = i\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

und in diesem Falle ist $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'(z_0)$.

H27: Es sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$, und es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}^d$ definiert durch

$$f(x) := x^T A x \quad (x \in \mathbb{R}^d)\,.$$

Berechnen Sie grad$f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^d$.