J. Müller

SS 2006
14.06.2006

7. Übung zur Analysis II

Abgabe: Dienstag, 20.06.06, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G13: Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 \frac{\cos x}{x}\, dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx\,.$$

G14: Für welche $\alpha > 0$ ist $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \ln^\alpha \nu}$ konvergent?

G15: Es sei $-\infty \le a < b \le \infty$, und es seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{K}$ stückweise stetig auf $[A,B]$ mit Stammfunktionen F bzw. $G : (a,b) \to \mathbb{K}$ auf $[A,B]$ für $a < A < B < b$. Zeigen Sie: Existieren $\lim\limits_{x\to a^+} FG(x)$ und $\lim\limits_{x\to b^-} FG(x)$, so existiert $\int_{a^+}^{b^-} fG$ genau dann, wenn $\int_{a^+}^{b^-} Fg$ existiert, und in diesem Falle gilt

$$\int_{a^+}^{b^-} fG = FG|_a^b - \int_{a^+}^{b^-} Fg\,.$$

Hausübungen

H19: Zeigen Sie: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ ist divergent.

H20: a) Beweisen Sie:

i) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad (x > 0)$,

ii) $\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

H21: Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx\,, \qquad \text{(iii)} \quad \int_0^\infty x \sin(e^x) dx\,.$$