J. Müller

SS 2006
17.05.2006

4. Übung zur Analysis II

Abgabe: Dienstag, 23.05.2006, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G10: Zeigen Sie: Ist

$$A(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{2\nu+1} \qquad (|z| < 1)\,,$$

so gilt

$$A(x) = \arctan x \qquad (x \in (-1,1))\,.$$

G11: Zeigen Sie: Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $U_R(z_0)$.

G12: Berechnen Sie $f^{(k)}(0)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ für $f(z) = e^{z^2/2}$ $(z \in \mathbb{C})$.

Hausübungen

H10: a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}\,.$$

Zeigen Sie: f ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}\,,$$

wobei P_k ein geeignetes Polynom ist.

b) Hat f eine Potenzreihenentwicklung um 0, d.h. existieren eine Folge (a_ν) in $\mathbb{R}$ und ein $\delta > 0$ mit

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

für $-\delta < x < \delta$?

H11: Berechnen Sie $f^{(k)}(0)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ für $f(z) = z\sin(z^2)$ $(z \in \mathbb{C})$.

H12: Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Zeigen Sie: Ist $A(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$, so ist $A(z) \equiv 0$ oder es existiert ein $\delta > 0$ so, dass $A(z) \neq 0$ für $0 < |z - z_0| < \delta$.