J. Müller SS 2006

10.05.2006

3. Übung zur Analysis II

Abgabe: Dienstag, 16.05.2006, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G7: Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, (Y, d) ein metrischer Raum und $f, f_n : X \to Y$. Ferner seien $M_\alpha \subset X$ $(\alpha \in I)$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf M_α $(\alpha \in I)$. Zeigen Sie: Ist $J \subset I$ endlich, so gilt auch

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } \bigcup_{\alpha \in J} M_\alpha\,.$$

Liegt auch stets gleichmäßige Konvergenz auf $\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ vor?

G8: Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu} z^\nu\,,$ (ii) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu!\, z^{2\nu}.$

G9: Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und es sei $A \subset X$ abgeschlossen. Zeigen Sie: Dann ist auch (A, d) (d.h. $(A, d_{|A\times A})$) vollständig.

Hausübungen

H7: Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt, und es sei $(E, |\cdot|_E)$ ein Banachraum. Zeigen Sie:

(i) $C(K, E) := \{f : K \to E : f \text{ stetig auf } K\} \subset B(K, E)$,

(ii) $C(K, E)$ ist abgeschlossen in $(B(K, E), d_{\|\cdot\|_\infty})$,

(iii) $(C(K, E), d_{\|\cdot\|_\infty})$ ist ein Banachraum.

H8: Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, und es seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $(f_n(a))$ konvergent und ist (f_n') gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$, so ist auch (f_n) gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$.

H9: Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(z)}{z^2} & ,\ z \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & ,\ z = 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{C}$.