J. Müller

SS 2006
26.04.2006

1. Übung zur Analysis II

Abgabe: Dienstag, 02.05.2006, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G1: Es sei $a > 0$ fest, und es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Untersuchen Sie f auf Monotonie und Extremstellen.

G2: Zeigen Sie: Für alle $x > 0$ gilt

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

G3: Die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Untersuchen Sie $f = \cosh$ auf Monotonie.

b) Berechnen Sie g', wobei $g = (f_{|(0,\infty)})^{-1}$.

Hausübungen

H1: Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, Monotonie und Extremstellen.

H2: Es sei $\alpha \in \mathbb{K}$, und es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Zeigen Sie, das folgende Aussagen äquivalent sind:

a) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = \alpha f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

b) Es existiert ein $c \in \mathbb{K}$ mit $f(x) = ce^{\alpha x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

H3: Es seien $(X, d), (Y, e)$ metrische Räume, und es sei $f : M \to Y$, wobei $M \subset X$. Dann heißt f Lipschitz-stetig (auf M), falls eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$e(f(x), f(\tilde{x})) \leq c\, d(x, \tilde{x})$$

für alle $x, \tilde{x} \in M$.

a) Zeigen Sie:

(i) Ist f Lipschitz-stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig (auf M).

(ii) Ist $(X, d) = (Y, e) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ und ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit beschränkter Ableitung, so ist f Lipschitz-stetig.

b) Gilt die Aussage von a) (ii) auch ohne die Voraussetzung der Beschränktheit von f'?