

12. Übung zur Analysis II**Gruppenübungen**G28: a) Zeigen Sie: Für alle  $A \in \mathbb{K}^{m \times d}$  gilt

$$\max_{j,k} |a_{jk}| \leq \|A\| \leq d\sqrt{m} \cdot \max_{j,k} |a_{jk}|.$$

b) Zeigen Sie: Ist  $B \in \mathbb{K}^{d \times d}$  mit  $\|B\| < 1$ , so ist  $E - B$  invertierbar, und es gilt

$$(E - B)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B^{\nu}.$$

G29: Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \left( (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right).$$

Zeigen Sie:

- i)  $f$  ist lokal umkehrbar für alle  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- ii) Es existiert keine offene Umgebung  $U$  von  $(0, 0)$  so, dass  $f|_U$  bijektiv ist.

G30: Es sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \left( (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right),$$

und es sei  $(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ .

i) Zeigen Sie:

Es gibt eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$ , eine offene Umgebung  $W$  von  $(x_0, y_0)$  und eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass für  $(x, y) \in W$  gilt:

$$F(x, y) = 0 \quad \text{genau dann, wenn } y = f(x).$$

- ii) Bestimmen Sie die Funktion  $f$  mit einem geeigneten Definitionsbereich  $U$ .
- iii) Berechnen Sie  $f'(x)$  mit Satz 17.6.