J. Müller SS 2006

12.07.2006

11. Übung zur Analysis II

Abgabe: Dienstag, 25.07.06, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G25: Es seien $g, h \in R[a, b]$ mit $g \geq 0$ auf $[a, b]$ und h reellwertig. Zeigen Sie:

(i) $\inf\limits_{[a,b]} h(x) \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b hg \leq \sup\limits_{[a,b]} h(x) \int\limits_a^b g \, .$

(ii) Ist f stetig, so existiert ein $\tau \in [a, b]$ mit

$$\int\limits_a^b hg = h(\tau) \int\limits_a^b g \, .$$

G26: Bestimmen Sie die Extremstellen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \, .$$

G27: Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie: Ist $Hf(x) \equiv \text{const}$ auf $\mathbb{R}^d$, so gilt

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T \, Hf(0) \, x \; + \; \operatorname{grad}^T f(0) \cdot x + f(0) \quad (x \in \mathbb{R}^d) \, .$$

Verifizieren Sie dies für die Funktion f aus G26.

Hausübungen

H31: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ auf lokale Extrema.

(i) $f(x, y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} - 4x + y \, , \qquad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}.$

(ii) $f(x, y) = x^2 + 2xy^3 + y^5 + y^6 \, , \qquad M = \mathbb{R}^2.$

H32: Es seien $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ positiv definit und $b \in \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := x^T \, Ax + b^T x + c \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

genau ein globales Minimum, und zwar an der Stelle $x = -\dfrac{1}{2} \, A^{-1} b$, hat.

H33: (Methode der kleinsten Quadrate)

(i) Für ein $N \geq 2$ seien $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_N \neq x_1$ vorgegeben. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$F(a, b) := \sum_{k=1}^{N} (ax_k + b - y_k)^2$$

minimal wird. Die Gerade $\{(x, ax+b) : x \in \mathbb{R}\}$ heißt dann Ausgleichsgerade bezüglich der Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$.

(ii) Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade bezüglich der Punkte

$$(-2, 0),\ (-1, 0),\ (0, 1),\ (1, 3),\ (2, 2)\,.$$