J. Müller

SS 2006
05.07.2006

10. Übung zur Analysis II

Abgabe: Dienstag, 11.07.06, vor der Vorlesung

Gruppenübungen

G22: Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ so, dass $tx \in M$ für alle $t > 0$ und $x \in M$ gilt. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{K}^m$ heißt homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, falls

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \qquad (t > 0, x \in M)\,.$$

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Homogenität:

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$

(ii) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\},$

(iii) $f(x,y) = x^2 + y\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

(iv) $f(x,y) = x^a y^b\,, \quad (x,y) \in (0,\infty)^2$

G23: Zeigen Sie: Ist $M \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : M \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad α und differenzierbar auf M, so ist

$$\operatorname{grad}^T f(x) \cdot x = \alpha f(x) \qquad (x \in M).$$

G24: Berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{xy^2}$ die partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung.

Hausübungen

H28: Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d,\ c > 0$. Die COBB-DOUGLAS-Produktionsfunktion $P : (0,\infty)^d \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$P(x) = P(x_1, \ldots, x_d) := c \cdot \prod_{j=1}^{d} x_j^{\alpha_j} \qquad (x = x_1, \ldots, x_d)^T \in (0,\infty)^d).$$

(i) Untersuchen Sie P auf Homogenität.

(ii) Berechnen Sie für $j = 1, \ldots, d$ die partiellen Ableitungen $\partial_j P$.

(iii) Zeigen Sie, dass für die partiellen Elastizitäten

$$\varepsilon_j(x) := x_j\, \frac{\partial_j P(x)}{P(x)} \qquad (1 \le j \le d,\ x \in (0,\infty)^d)$$

gilt

$$\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_j(x) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \qquad (x \in (0,\infty)^d).$$

H29: Es sei $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) = \sqrt{xy}$. Für $c > 0$ heißt $f^{-1}(\{c\})$ die Höhenlinie zum Niveau c. Zeigen Sie, dass in jedem Punkt in $(0,\infty)^2$ gilt:
„Gradient $\perp$ Höhenlinie", d.h. der Gradient und die Tangente an die betreffende Höhenlinie stehen senkrecht aufeinander.

H30: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} x \cdot y \, \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) Zeigen Sie: $\partial_2 \partial_1 f(0,0) = -1$ und $\partial_1 \partial_2 f(0,0) = 1$.

ii) Weisen Sie die Unstetigkeit von $\partial_1 \partial_2 f$ und von $\partial_2 \partial_1 f$ an $(0,0)$ nach.