J. Müller WS 2005/2006

10.01.2006

9. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 16.01.2006, vor der Übung

Gruppenübungen

G22: Es sei $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie das Cauchy-Produkt von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)z^\nu$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Produktreihe konvergent? Welchen Wert hat die Produktreihe im Falle der Konvergenz?

G23: Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

(i) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$,

(ii) $\cos(z) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu/2} z^\nu}{\nu!}$ und $\sin(z) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{(\nu-1)/2} z^\nu}{\nu!}$.

G24: Beweisen Sie: Ist (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und ist $z \in \mathbb{C}$, so sind äquivalent:

a) $z_n \to z \qquad (n \to \infty)$,

b) $\overline{z}_n \to \overline{z} \qquad (n \to \infty)$,

c) $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z \qquad (n \to \infty)$.

Hausübungen

H25: a) Zeigen Sie: Das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen ist absolut konvergent.

b) Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{k+\nu}{k} z^\nu$ absolut konvergent mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{k+\nu}{k} z^\nu = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\,.$$

H26: (de Moivre Formeln)

Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos(nx) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu/2} \sin^\nu(x) \cos^{n-\nu}(x)\,,$$

$$\sin(nx) = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^{(\nu-1)/2} \sin^\nu(x) \cos^{n-\nu}(x)\,.$$

H27: Es sei I eine abzählbar unendliche Menge, und es seien $a_j \geq 0$ $(j \in I)$. Wir setzen

$$\sum_{j \in I} a_j := \sup \Big\{ \sum_{j \in J} a_j : J \subset I \text{ endlich} \Big\}$$

(wobei $\sup A := \infty$, falls A nach oben unbeschränkt ist).
Zeigen Sie: Ist $I = \{j_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von I mit $j_\nu \neq j_\mu$ für $\nu \neq \mu$, so ist

$$\sum_{j \in I} a_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j_\nu} .$$